# การใช้เอลิเมนต์ผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรีกับการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว

Using The 9-DOF Curve Elements for Electric Field Calculation by using The Surface Charge Method.

นิติพงศ์ ปานกลาง[1]

**บทคัดย่อ:**

บทความนี้นำเสนอการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรีกับการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิวเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรีสามารถสร้างได้ง่าย โดยอาศัยพิกัดและเวกเตอร์สัมผัส ณ ปมทั้งสามของเอลิเมนต์เชิงเส้น ผลการคำนวณพบว่าการสร้างแบบจำลองด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งช่วยลดความคลาดเคลื่อนของพื้นที่ผิวจาก 0.51% เหลือ 0.0046% ที่จำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 1,520 เอลิเมนต์ สนามไฟฟ้าที่คำนวณได้จากแบบจำลองที่สร้างด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งมีความถูกต้องมากขึ้น เมื่อเทียบกับแบบจำลองที่สร้างด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงเส้น การใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรีทำให้ความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าโดยเฉลี่ยลดลงประมาณ 50%

**คำสำคัญ :** วิธีประจุพื้นผิว เอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรี

**Abstract**

This paper presents the application of 9-DOF curve elements in electric-field calculation by using the surface charge method. The 9-DOF curve triangular element is easily constructed with a coordinate and the tangent vector at the nodes of linear triangular element. The results show that the 9-DOF curve model has reduced the error of surface area from 0.51% to 0.0046% for 1,520 elements.The electric-field calculated on a 9-DOF curve model is more accuracy than a liner triangular model. The 9-DOF curve element reduced the average error of electric-field about 50%.

**Keyword :** Surface Charge Method, 9-DOF Curve Element.

## 1. บทนำ

ปัจุบันคอมพิวเตอร์มีบทบาทอย่างยิ่งต่อการคำนวณทางด้านวิศวกรรมในสาขาต่าง ๆ สาขาวิศวกรรมไฟฟ้าแรงสูงก็เช่นกัน คอมพิวเตอร์ทำให้เราสามารถคำนวณและจำลองสนามไฟฟ้าโดยอาศัยวิธีเชิงตัวเลข วิธีเชิงตัวเลขที่นิยมใช้และรู้จักกันโดยทั่วไป เช่น วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) วิธีชิ้นประกอบขอบเขต (Boundary Element Method) และวิธีประจุพื้นผิว(Surface Charge Method) เป็นต้น

วิธีประจุพื้นผิวเป็นวิธีเชิงตัวเลขสำหรับคำนวณศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า ข้อดีของวิธีนี้คือหลักการคำนวณไม่ซับซ้อน และง่ายต่อการเขียนโปรแกรมคำนวณ ปัญหาอย่างหนึ่งของการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเชิงตัวเลขได้แก่ การสร้างแบบจำลองให้มีรูปร่างสมจริง ความสมจริงของแบบจำลองส่งผลต่อความคลาดเคลื่อนของศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้ การสร้างแบบจำลองด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงเส้นทำได้ง่าย แต่ต้องใช้จำนวนเอลิเมนต์มากผลเฉลย

[1] อาจารย์ ประจำ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล
โทร. (02) 549-3429, Email:p_nitipong@rit.ac.th

จึงมีความถูกต้องสูง บทความนี้เสนอวิธีการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์ผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรี(9-DOF Curve Element)ในการสร้างแบบจำลอง เพื่อลดความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้ โดยเปรียบเทียบผลการคำนวณกับแบบจำลองที่สร้างด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงเส้น

## 2. วิธีประจุพื้นผิว

วิธีประจุพื้นผิวเป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้คำนวณศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า การคำนวณอาศัยการแบ่งพื้นผิวของแบบจำลองส่วนที่เป็นตัวนำและฉนวนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ตัวแปรไม่ทราบค่าในการคำนวณคือความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าบนเอลิเมนต์ การหาค่าความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าทำโดยแก้สมการความสัมพันธ์ระหว่างประจุไฟฟ้ากับค่าศักย์และสนามไฟฟ้าตามเงื่อนไขขอบเขต เงื่อนไขขอบเขตในการคำนวณหาค่าความหนาแน่นประจุได้แก่

1) ศักย์ไฟฟ้าที่ตัวนำมีค่าคงที่ตลอด

2) ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าในแนวตั้งฉากบนรอยต่อของฉนวนสองชนิดมีค่าต่อเนื่อง ดังสมการที่ (1)

$$D_{n2} - D_{n1} = 0 \qquad (1)$$

เมื่อ $D_n$ คือความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าในแนวตั้งฉาก ($C/m^2$) โดยมีดรรชนีล่าง 1 และ 2 เป็นตัวระบุด้านของฉนวน

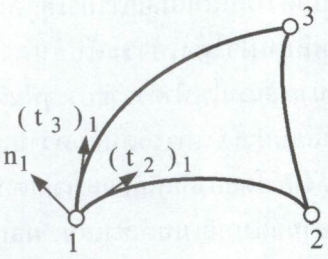
3) ผลรวมของประจุไฟฟ้าบนตัวนำที่ไม่ทราบค่าศักย์ไฟฟ้ามีค่าเท่ากับศูนย์

นอกจากนั้นการคำนวณ เรากำหนดให้ตัวกลางทั้งหมดเป็นแบบไอโซทรอปิก (Isotropic) และปราศจากประจุค้าง (Space Charge)

สมการที่ใช้คำนวณหาความหนาแน่นประจุอยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น

$$A\sigma = \mathbf{b} \qquad (2)$$

โดย $A_{ij}$ คือตัวประกอบศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า ณ เอลิเมนต์ i เนื่องจากประจุบนเอลิเมนต์ j ($Vm^2/C$ หรือ $Vm/C$) $\sigma_j$ คือ ความหนาแน่นประจุบนเอลิเมนต์ j ($C/m^2$) และ $b_j$ คือค่าซึ่งขึ้นกับเงื่อนไขขอบเขต ( V หรือ V/m)




*รูปที่ 1 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรีเมื่อ $n_1$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ปม 1, $(t_3)_1$ และ $(t_2)_1$ คือเวกเตอร์สำผัสที่ปม 1*

จากสมการที่ (2) เมื่อเราทราบค่าความหนาแน่นประจุบนเอลิเมนต์ต่าง ๆ แล้ว เราสามารถนำไปคำนวณศักย์ไฟฟ้าหรือสนามไฟฟ้า ณ จุดต่าง ๆ บนแบบจำลองได้ต่อไป

## 3. เอลิเมนต์ผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรี

เอลิเมนต์ผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรีประกอบด้วยฟังก์ชันรูปร่าง $N_1, N_2, \ldots\ldots, N_9$ [1] ฟังก์ชันรูปร่างดังกล่าวสร้างจากพิกัดและเวกเตอร์สัมผัส ณ ปมทั้งสามของเอลิเมนต์รูปที่ 1 แสดงลักษณะของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรี

การคำนวณพิกัดบนพื้นผิวของเอลิเมนต์คำนวณจากสมการ [2]

$$P(L_1,L_2,L_3) = \sum_{i=1}^{3}\left\{N_iP_i + N_{i+3}\left(\frac{\partial P}{\partial L_1}\right)_i + N_{i+6}\left(\frac{\partial P}{\partial L_2}\right)_i\right\} \qquad (3)$$

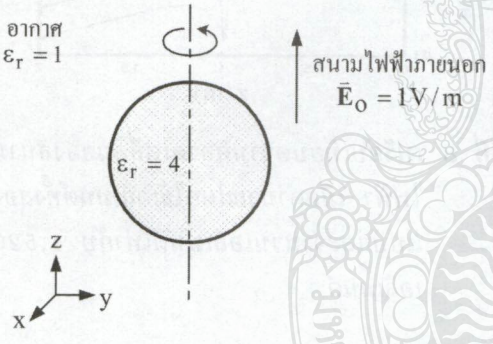
เมื่อ P คือพิกัดบนพื้นผิวเอลิเมนต์ $N_i$ คือฟังก์ชันรูปร่างของสามเหลี่ยมผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรี $P_i$

คือพิกัดที่ปม i $\frac{\partial P_i}{\partial L_1}$ และ $\frac{\partial P_i}{\partial L_2}$ คืออนุพันธ์ของ $P_i$ ในทิศทาง $L_1$ และ $L_2$ ตามลำดับ $L_1$, $L_2$ และ $L_3$ คือพิกัดพื้นที่ (Area Coordinate) ของรูปสามเหลี่ยม [3]

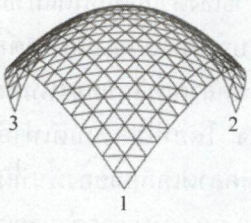
## 4. ผลการคำนวณและวิเคราะห์ผลการคำนวณ

### *4.1 ปัญหาการคำนวณสนามไฟฟ้า*

ปัญหาการคำนวณสนามไฟฟ้าเป็นทรงกลมฉนวนภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอดังรูปที่ 2 ทรงกลมฉนวนมีรัศมีเท่ากับ 1 เมตร และค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 4 จุดศูนย์กลางของทรงกลมอยู่ที่พิกัด (0,0,0) บริเวณภายนอกทรงกลมเป็นอากาศค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 1 และมีสนามไฟฟ้าภายนอก, $\bar{E}_0$ เท่ากับ 1V/m ในทิศทาง +Z การคำนวณพื้นผิวของทรงกลมถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 1,520 เอลิเมนต์




*รูปที่ 2 แบบจำลองทรงกลมฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ.*

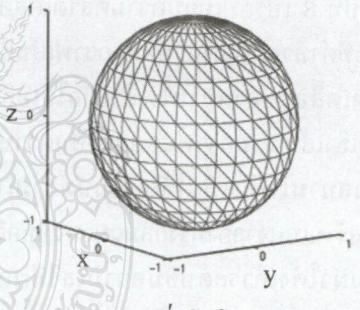



*รูปที่ 3 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งที่สร้างจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงเส้น*

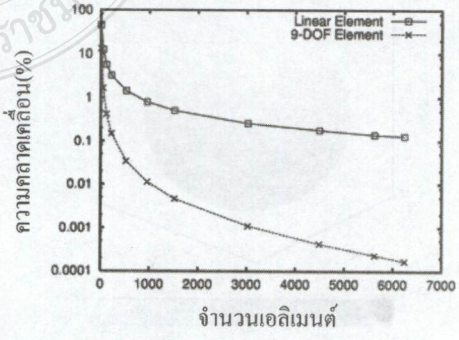
### *4.2 การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งแบบเก้าระดับชั้นความเสรี*

เอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรีสามารถสร้างจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงเส้นได้ดังรูปที่ 3 การสร้างพื้นผิวโค้งใช้สมการที่(3) เปลี่ยนพิกัดบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงเส้นไปยังพิกัดบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้ง

รูปที่ 4 แสดงทรงกลมที่สร้างจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรี รูปที่ 5 แสดงการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของพื้นที่ผิวของทรงกลมเมื่อสร้างจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงเส้นและเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้ง การสร้างทรงกลมด้วยเอลิเมนต์ผิวโค้งทำให้พื้นที่ผิวมีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าทรงกลมที่สร้างด้วยเอลิเมนต์เชิงเส้น ตัวอย่างเช่น เมื่อสร้างทรงกลมจากเอลิเมนต์ผิวโค้งจำนวน 1,520 เอลิเมนต์ทำให้พื้นที่ผิวของทรงกลมมีความคลาดเคลื่อนลดลงจาก 0.51% เหลือ 0.0046%




*รูปที่ 4 ทรงกลมฉนวนที่สร้างโดยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรี.*

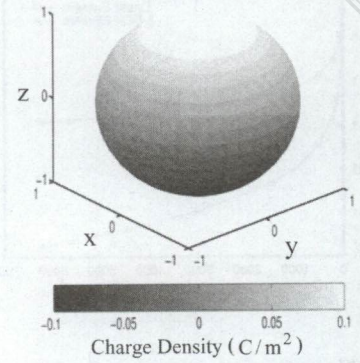



*รูปที่ 5 เปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของพื้นผิวทรงกลมที่เอลิเมนต์ค่าต่าง ๆ*

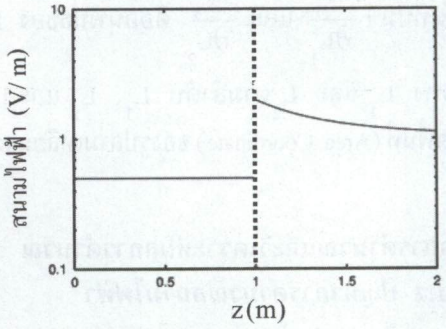
### *4.3 การคำนวณสนามไฟฟ้า*

จากแบบจำลองรูปที่ 2 ผู้เขียนได้คำนวณสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z ที่ระยะ $(0 \le z \le 2)$ การแก้ระบบสมการ $\mathbf{A\sigma = b}$ ได้ผลลัพธ์ค่าความหนาแน่นประจุเชิงผิวแสดงดังรูปที่ 6 ความหนาแน่นประจุเชิงผิวที่คำนวณได้สัมพันธ์กับทิศทางของสนามไฟฟ้าภายนอกที่พุ่งผ่านทรงกลมฉนวน พื้นที่ของทรงกลมฉนวนบริเวณที่สนามไฟฟ้าพุ่งเข้าค่าความหนาแน่นประจุเชิงผิวมีค่าเป็นลบ ส่วนบริเวณที่สนามไฟฟ้าพุ่งออก ค่าความหนาแน่นประจุเชิงผิวมีค่าเป็นบวก จากค่าความหนาแน่นประจุสามารถนำไปคำนวณหาสนามไฟฟ้า ณ จุดต่างๆ ได้ สนามไฟฟ้าภายในและนอกทรงกลมแสดงดังรูปที่ 7 โดยมีเส้นประเป็นตัวแบ่งขอบเขตของทรงกลม สนามไฟฟ้าภายในทรงกลมมีค่าคงที่เท่ากับ 0.5V/m ภายนอกทรงกลม สนามไฟฟ้ามีค่าสูงสุดบริเวณผิวของทรงกลมเท่ากับ 2V/m และมีค่าลดลงตามระยะ z ที่เพิ่มขึ้น

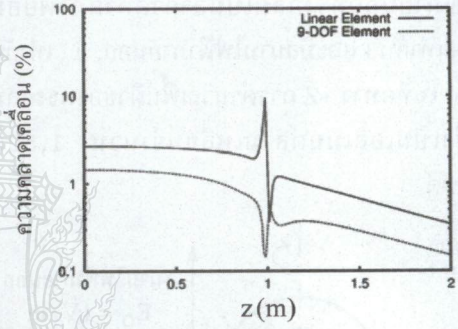
รูปที่ 8 เปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้ จากรูปที่ 8 กราฟเส้นทึบเป็นความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าเมื่อใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงเส้น ส่วนกราฟเส้นประเป็นความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าเมื่อใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้ง การสร้างแบบจำลองทรงกลมฉนวนจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรีมีผลทำให้ความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าลดต่ำลง ความคลาดเคลื่อนสนามไฟฟ้าเฉลี่ยลดลงประมาณ 50%




*รูปที่ 6 ความหนาแน่นประจุเชิงผิวที่คำนวณได้.*




*รูปที่ 7 ลักษณะของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z เมื่อ $(0 \le z \le 2)$ โดยเส้นประแสดงขอบเขตของทรงกลมฉนวน.*




*รูปที่ 8 เปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้า เมื่อคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์ทั้งสองแบบและจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 1,520 เอลิเมนต์*

## 5. สรุป

บทความนี้นำเสนอการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรีในการจำลองพื้นผิวของแบบจำลองสำหรับการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเชิงตัวเลข วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ได้แก่วิธีประจุพื้นผิว ผลการสร้างแบบจำลองด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้งทำให้ความคลาดเคลื่อนของพื้นที่ผิวของแบบจำลองมีค่าลดลง โดยที่เอลิเมนต์เท่ากับ 1,520 เอลิเมนต์ ความคลาดเคลื่อนของพื้นที่ผิวลดลงจาก 0.51% เหลือ 0.0046% การคำนวณสนามไฟฟ้าบนแบบจำลองทรงกลมฉนวนที่สร้างด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมผิวโค้ง ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของสนามไฟฟ้าลดลงประมาณ 50%

**เอกสารอ้างอิง**

[1] H. Tsuboi, T. Takayama and K. Yano, "Setting Curved-Surface Triangular Element of Boundary Element Method for Electrostatic Field Problems", IEEE Trans. on Magnetic, Vol.35, No.3, pp1123-1126, May 1999.

[2] วุฒิภูมิ อิทธิพลโสภา และ บุญชัย เตชะอำนาจ, "การประยุกต์ใช้เอลิเมนต์ผิวโค้งเก้าระดับชั้นความเสรีในการคำนวณศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเบานด์ดารีเอลิเมนต์", การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้าครั้งที่ 25, 21-22 พ.ย. 2545, หน้า 129-132.

[3] ปราโมทย์ เดชอำไพ, "ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล", สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ, 2545.

**ประวัติผู้เขียนบทความ**

**ชื่อ:** นายนิติพงศ์ ปานกลาง

**ประวัติการศึกษา :**

- วศม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย พ.ศ. 2547

**ปัจจุบัน:** อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล

**สาขางานวิจัยที่สนใจได้แก่:**

วิศวกรรมไฟฟ้าแรงสูง การคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเชิงตัว-เลข