วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นงานวิจัยที่เกิดจากการค้นคว้าและวิจัย ขณะที่ข้าพเจ้าศึกษาอยู่ในคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ดังนั้นงานวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ถือเป็นลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี และข้อความต่าง ๆ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอรับรองว่าไม่มีการคัดลอกหรือนำงานวิจัยของผู้อื่นมานำเสนอในชื่อของข้าพเจ้า

This thesis consists of research materials conducted at the Faculty of Engineering, Rajamangala University of Technology Thanyaburi and hence the copyright owner. I hereby certify that the thesis does not contain any forms of plagiarism.

(นายมานะชัย สุวรรณ)

COPYRIGHT © 2019
FACULTY OF ENGINEERING
RAJAMANGALA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY THANYABURI

ลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2562
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคา ที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุด

EFFECT OF ROTATIONAL SPRING JOINT ON LARGE DEFLECTION BEHAVIOR OF VARIABLE - ARC - LENGTH ELASTICA SUBJECTED TO POINT LOAD

มานะชัย สุวรรณ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2562
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคา ที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุด

มานะชัย สุวรรณ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2562
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุด Effect of Rotational Spring Joint on Large Deflection Behavior of Variable – Arc – Length Elastica Subjected to Point Load
ชื่อ – นามสกุล	นายมานะชัย สุวรรณ
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.
ปีการศึกษา	2562

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา, ปร.ด.)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์วีระศักดิ์ ละอองจันทร์, Dr.-Ing.)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.)

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี อนุมัติวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ศิวกร อ่างทอง, Ph.D.)
วันที่ 11 เดือน ตุลาคม พ.ศ. 2562

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุด
ชื่อ - นามสกุล	นายมานะชัย สุวรรณ
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.
ปีการศึกษา	2562

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เกี่ยวข้องกับการศึกษาผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุดในแนวดิ่ง โดยที่จุดต้านทานการหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงของอิลาสติกคา ณ ตำแหน่งใด ๆ โดยที่ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาถูกรองรับด้วยจุดรองรับที่หมุนได้อย่างอิสระ ส่วนที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางพาดอยู่บนจุดรองรับที่เลื่อนได้โดยไร้แรงเสียดทาน

การศึกษาในครั้งนี้ จะทำการวิเคราะห์ตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงแทนด้วยสัญลักษณ์ของ α ตำแหน่งของแรงที่กระทำแทนด้วยสัญลักษณ์ของ β ทั้งหมด 3 กรณี คือ $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ และ $\alpha > \beta$ โดยกำหนดค่า $\bar{K} = 1$, 10 และ 100 และเมื่ออิลาสติกคาเกิดการเสียรูปความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอิลาสติกคามีค่าไม่คงที่ โดยที่จุดต้านทานการหมุนแบบสปริงจะทำหน้าที่ส่งถ่ายโมเมนต์ดัดตามความสัมพันธ์ของ $\bar{M} = \bar{K}\Delta\theta$ สมการครอบคลุมของปัญหาจะประกอบด้วยสมการสมดุล ความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งและโมเมนต์ และความสัมพันธ์ของรูปร่างทางเรขาคณิต เพื่อให้ได้ผลลัพธ์เชิงตัวเลข งานวิจัยนี้ได้ใช้วิธียิงเป้าโดยการอินทิเกรตเชิงตัวเลขกับระบบสมการอนุพันธ์ ซึ่งภายหลังจากการอินทิเกรตผลลัพธ์ที่ได้ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขของปัญหา มิฉะนั้นแล้วกระบวนการกระทำซ้ำของนิวตัน - ราฟสัน จะถูกนำมาใช้เพื่อปรับแก้ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

ผลการศึกษาพบว่าแรงกระทำและความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคามีค่าที่เพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องและมีพฤติกรรมเป็นแบบสมดุลแบบมีเสถียรภาพเท่านั้น ในกรณีที่ตำแหน่งของแรงกระทำมีตำแหน่งเข้าใกล้ปลายอิลาสติกคา ผลจากการยึดรั้งของจุดรองรับส่งผลทำให้ความชันของกราฟมีค่าที่สูงขึ้น (ดังนั้นสติฟเนสของอิลาสติกคามีค่าสูงขึ้นด้วย) โดยสาเหตุที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากเกิดการดึงรั้งขึ้นเมื่อเพิ่มค่าสติฟเนสของสปริงทำให้พฤติกรรมของอิลาสติกคามีค่าเข้าใกล้กับอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกันและผลจากการทดลองอย่างง่ายแสดงให้เห็นว่าผลที่ได้จากการทฤษฎีและการทดลองมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

คำสำคัญ: อิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ การแอ่นตัวมาก ระเบียบวิธียิงเป้า

Thesis Title	Effect of Rotational Spring Joint on Large Deflection Behavior of Variable - Arc - Length Elastica Subjected to Point Load
Name - Surname	Mr. Manachai Suwan
Program	Civil Engineering
Thesis Advisor	Assistant Professor Boonchai Phungpaigam, Ph.D.
Academic Year	2019

ABSTRACT

This thesis aimed to investigate the effect of rotational spring joint on the large deflection behavior of variable - arc - length elastica subjected to a point load in the vertical direction. The rotational spring joint was located with the span - length of the elastica. One end of the elastica was attached on a hinged support while another end was placed on the frictionless roller support where the length of the elastica could be slid through this support.

In this study, three cases of the relationship between the position of the spring joint α and the loading β would be analyzed. They were $\alpha<\beta$, $\alpha=\beta$, and $\alpha>\beta$ where the stiffness of the spring joint $\bar{K}$ was assigned by the values of 1, 10, and 100. In the deformed state, the total arc - length of the elastica was varied and the rotational spring joint carried the bending moment in the form of $\bar{M}=\bar{K}\Delta\theta$. The governing differential equations consisted of equilibrium equations, moment - curvature relation, and geometric relations. For obtaining the numerical results, the shooting method was employed in this study. The numerical integration was performed on the system of differential equations. After the integration, the constraint conditions needed to be satisfied. Otherwise, the Newton - Raphson iterative scheme would be applied to correct the unknown variables.

From the results, it was found that the relationship between force and total arc - length increases monotonically and only stable equilibrium could be observed. For the cases of the point load located near the supports, the result of the strained support caused the higher slope of the load deflection curves (and hence the stiffness of the elastica). When the stiffness of the spring joint was increased, the behavior of the elastica converged to the behavior of the single VAL elastica. From the simple experiment, it indicated that the theoretical and experimental results were in good agreement.

Keywords: variable - arc - length elastica, large deflections, shooting method

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะสำเร็จลุล่วงไปไม่ได้หากไม่ได้รับความกรุณา และความอนุเคราะห์เป็นอย่างดียิ่งจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย ผึ้งไผ่งาม อาจารย์ที่ปรึกษา ที่ท่านได้กรุณาเสียสละเวลาให้คำปรึกษา คำแนะนำ และให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแก้ไขข้อพกพร่องต่าง ๆ ตลอดจนติดตามความก้าวหน้าในการจัดทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้อย่างใกล้ชิดด้วยดีตลอดมา นับตั้งแต่เริ่มต้นจนกระทั่งวิทยานิพนธ์เสร็จเรียบร้อยสมบูรณ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กำธรเกียรติ มุสิเกต ประธานกรรมการฯและผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วีระศักดิ์ ละอองจันทร์ กรรมการฯ ที่ได้ให้ความกรุณาในการแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ของงานวิจัย รวมทั้งเสียสละเวลามาเป็นคณะกรรมการในการสอบวิทยานิพนธ์ และขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา กรรมการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก จากคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน ที่กรุณาให้เกียรติเสียสละเวลามาร่วมเป็นคณะกรรมการในการสอบวิทยานิพนธ์ และให้คำแนะนำในด้านต่าง ๆ อันเป็นประโยชน์แก่งานวิจัยนี้

ขอขอบพระคุณ องค์การบริหารส่วนจังหวัดสมุทรสงคราม กรมส่งเสริมการปกครองท้องถิ่น กระทรวงมหาดไทย ที่ได้พิจารณาคัดเลือกให้เป็นผู้ได้รับทุนการศึกษาในครั้งนี้

ขอขอบพระคุณ บริษัท เอ.เอน.เอส. ซุปเปอร์สปริง จำกัด ที่ให้การสนับสนุนชุดอุปกรณ์สำหรับใช้ในการทดสอบตัวอย่าง

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณครูบาอาจารย์ทุก ๆ ท่าน เพื่อนสนิทมิตรสหายและทุกคนในครอบครัว ที่คอยให้การสนับสนุนและเป็นกำลังใจด้วยดีในการจัดทำวิทยานิพนธ์ตลอดระยะเวลาที่ผ่านมา ซึ่งประโยชน์อันใดที่ได้จากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ย่อมถือเป็นผลที่เกิดจากความกรุณาของท่านทั้งหลาย ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้ที่สนใจศึกษางานวิจัยทางด้านนี้ และหากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ขาดตกบกพร่อง หรือไม่มีความสมบูรณ์ประการใด ผู้วิจัยขอกราบขออภัยมา ณ โอกาสนี้ด้วย

มานะชัย สุวรรณ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	(3)
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	(4)
กิตติกรรมประกาศ	(5)
สารบัญ	(6)
สารบัญตาราง	(8)
สารบัญรูป	(9)
บทที่ 1 บทนำ	17
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	17
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย	19
1.3 สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์	19
1.4 ขอบเขตของการวิจัย	19
1.5 ขั้นตอนการวิจัย	20
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	20
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	21
2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	21
2.2 สมการการโก่งตัวมากในกรณีที่วัสดุเป็นแบบเชิงเส้น	25
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	29
3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด	29
3.2 แบบจำลองของปัญหา	29
3.3 กระบวนการคำนวณปัญหา	42
3.4 การทดสอบอิลาสติกคาตัวอย่าง	47
บทที่ 4 ผลการศึกษาและการวิเคราะห์	50
4.1 ผลการศึกษาในกรณีที่ 1 $(\alpha<\beta)$	50
4.2 ผลการศึกษาในกรณีที่ 2 $(\alpha=\beta)$	60
4.3 ผลการศึกษาในกรณีที่ 3 $(\alpha>\beta)$	69
บทที่ 5 สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ	79
5.1 พฤติกรรมการแอ่นตัวและเสถียรภาพของอิลาสติกคาในกรณีที่ 1 ระยะ $\alpha<\beta$	79
5.2 พฤติกรรมการแอ่นตัวและเสถียรภาพของอิลาสติกคาในกรณีที่ 2 ระยะ $\alpha=\beta$	80
5.3 พฤติกรรมการแอ่นตัวและเสถียรภาพของอิลาสติกคาในกรณีที่ 3 ระยะ $\alpha>\beta$	80
5.4 ข้อเสนอแนะของการทำวิจัยต่อไปในอนาคต	81
บรรณานุกรม	82

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
ภาคผนวก	84
ภาคผนวก ก แบบจำลองของอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica)	85
ภาคผนวก ข ระเบียบวิธีรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta Method)	89
ภาคผนวก ค ระเบียบวิธีนิวตัน - ราฟสัน	91
ภาคผนวก ง ระเบียบวิธีการยิงเป้า (Shooting Method)	94
ภาคผนวก จ การทดสอบหาค่าสติฟเนสของสปริง	97
ภาคผนวก ฉ ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณ	101
ภาคผนวก ช ผลการคำนวณเชิงตัวเลข	113
ภาคผนวก ซ ผลงานตีพิมพ์เผยแพร่	165
ประวัติผู้เขียน	178

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$ ค่า $\beta = 0.35$ ค่า $\bar{K} = 1, 10$ และ 100 และ Single VAL Elastica 51

ตารางที่ 4.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50$ ค่า $\beta = 0.60$ ค่า $\bar{K} = 1, 10$ และ 100 และ Single VAL Elastica 52

ตารางที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75$ ค่า $\beta = 0.85$ ค่า $\bar{K} = 1, 10$ และ 100 และ Single VAL Elastica 53

ตารางที่ 4.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$ ค่า $\bar{K} =$ 1, 10 และ 100 และ Single VAL Elastica 60

ตารางที่ 4.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50$ ค่า $\bar{K} =$ 1, 10 และ 100 และ Single VAL Elastica 61

ตารางที่ 4.6 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75$ ค่า $\bar{K} =$ 1, 10 และ 100 และ Single VAL Elastica 62

ตารางที่ 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$ ค่า $\beta = 0.15$ ค่า $\bar{K} = 1, 10$ และ 100 และ Single VAL Elastica 70

ตารางที่ 4.8 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50$ ค่า $\beta = 0.35$ ค่า $\bar{K} = 1, 10$ และ 100 และ Single VAL Elastica 71

ตารางที่ 4.9 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75$ ค่า $\beta = 0.50$ ค่า $\bar{K} = 1, 10$ และ 100 และ Single VAL Elastica 72

สารบัญรูป

หน้า

รูปที่ 1.1 ตัวอย่างของการประยุกต์ใช้กับงานท่อส่งน้ำมันและก๊าซธรรมชาติ 17
รูปที่ 2.1 ความสัมพันธ์ของเส้นโค้งยืดหยุ่นและโมเมนต์ดัดของอิลาสติกคา 26
รูปที่ 2.2 รูปร่างของอิลาสติกคาเมื่อเกิดการเสียรูป (ลักษณะการโก่งตัวของอิลาสติกคา) 26
รูปที่ 2.3 รูปร่างและพฤติกรรมของสปริงหมุนเมื่อมีแรงกระทำ (สมดุลที่จุด C)
(ก) ภาพถ่ายสปริงต้านทานการหมุนที่ใช้ในการทดลอง
(ข) ภาพวาดแบบจำลองของสปริงหมุน 28
รูปที่ 3.1 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะก่อนการเสียรูป กรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ 30
รูปที่ 3.2 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะหลังการเสียรูป กรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ 31
รูปที่ 3.3 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาในกรณีที่ 1 ระยะ $\alpha < \beta$ ในช่วงพิจารณาที่ $0 \le s \le \alpha L$ 31
รูปที่ 3.4 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาในกรณีที่ 1 ระยะ $\alpha < \beta$ (ก) ในช่วงพิจารณาที่ $\alpha L \le s \le \beta L$ และ (ข) ในช่วงพิจารณาที่ $\beta L \le s \le S_t$ 33
รูปที่ 3.5 พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาจากแรงเฉือน 34
รูปที่ 3.6 รูปร่างการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่มีจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงอยู่ภายใน 35
รูปที่ 3.7 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะก่อนการเสียรูป กรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ 36
รูปที่ 3.8 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะหลังการเสียรูป กรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ 36
รูปที่ 3.9 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาในกรณีที่ 2 ระยะ $\alpha = \beta$
(ก) ในช่วงพิจารณาที่ $0 \le s \le (\alpha L, \beta L)$ และ
(ข) ในช่วงพิจารณาที่ $\alpha L, \beta L \le s \le S_t$ 37
รูปที่ 3.10 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะก่อนการเสียรูป กรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ 38
รูปที่ 3.11 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะหลังการเสียรูป กรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ 39

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 3.12 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาในกรณีที่ 3 ระยะ $\alpha > \beta$ (ก) ในช่วงพิจารณาที่ $0 \le s \le \beta L$, (ข) ในช่วงพิจารณาที่ $\beta L \le s \le \alpha L$ และ (ค) ในช่วงพิจารณาที่ $\alpha L \le s \le S_t$ 39

รูปที่ 3.13 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม MATLAB ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ 44

รูปที่ 3.14 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม MATLAB ในกรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ 45

รูปที่ 3.15 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม MATLAB ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ 46

รูปที่ 3.16 การจับยึดแผ่นโพลีคาร์บอเนตทั้งสองด้านของการทดสอบ (โดยที่จุด A จำลองเป็นจุดรองรับแบบข้อหมุน และที่จุด B จำลองเป็นจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน) 48

รูปที่ 3.17 แบบจำลองจุด C (สปริงต้านทานการหมุนที่ใช้ในการทดลอง) 48

รูปที่ 3.18 ลักษณะการแอ่นตัวของอิลาสติกคาตัวอย่างที่จำลองจากวัสดุแผ่นโพลีคาร์บอเนต 49

รูปที่ 3.19 การวัดค่าการโก่งตัวของอิลาสติกคาตัวอย่างที่จำลองจากวัสดุแผ่นโพลีคาร์บอเนตด้วยโปรแกรม AutoCAD 49

รูปที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.35$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15$ Single VAL Elastica 55

รูปที่ 4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.60$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15$ Single VAL Elastica 55

รูปที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.85$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15$ Single VAL Elastica 56

รูปที่ 4.4 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.35,\ \alpha = 0.50,\ \beta = 0.60,\ \alpha = 0.75,\ \beta = 0.85$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15$, Single VAL Elastica 56

รูปที่ 4.5 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 35.00$ ค่า $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.35$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15$, Single VAL Elastica 57

รูปที่ 4.6 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 80.00$ ค่า $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.60$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15$, Single VAL Elastica 58

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 4.7 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 25.00$ ค่า $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.85$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica 59

รูปที่ 4.8 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.25$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica 64

รูปที่ 4.9 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.50$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica 64

รูปที่ 4.10 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.75$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica 65

รูปที่ 4.11 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.25, 0.50, 0.75$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica 65

รูปที่ 4.12 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 85.00$ ค่า $\alpha = 0.25$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica 66

รูปที่ 4.13 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 85.00$ ค่า $\alpha = 0.50$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica 67

รูปที่ 4.14 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 85.00$ ค่า $\alpha = 0.75$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica 68

รูปที่ 4.15 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.15$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica 74

รูปที่ 4.16 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.35$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica 74

รูปที่ 4.17 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.50$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica 75

รูปที่ 4.18 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.15,\ \alpha = 0.50,\ \beta = 0.35,\ \alpha = 0.75,\ \beta = 0.50$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica 75

รูปที่ 4.19 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 400.00$ ค่า $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.85$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica 76

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 4.20 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 3 ($\alpha > \beta$) เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 300.00$ ค่า $\alpha = 0.50$, $\beta = 0.35$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15$, Single VAL Elastica 77

รูปที่ 4.21 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 3 ($\alpha > \beta$) เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 140.00$ ค่า $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.50$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15$, Single VAL Elastica 78

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

A	ตัวกำกับล่างแสดงตำแหน่งจุดรองรับแบบข้อหมุน
B	ตัวกำกับล่างแสดงตำแหน่งจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน
C	ตัวกำกับล่างแสดงตำแหน่งจุดต้านทานการหมุนแบบสปริง ในกรณีที่ $\alpha < \beta$ ตัวกำกับล่างแสดงตำแหน่งจุดต้านทานการหมุนแบบสปริง และตำแหน่งของแรงกระทำ ในกรณีที่ $\alpha = \beta$ ตัวกำกับล่างแสดงตำแหน่งของแรงกระทำ ในกรณีที่ $\alpha > \beta$
D	ตัวกำกับล่างแสดงตำแหน่งของแรงกระทำ ในกรณีที่ $\alpha < \beta$ ตัวกำกับล่างแสดงตำแหน่งจุดต้านทานการหมุนแบบสปริง ในกรณีที่ $\alpha > \beta$
E	โมดูลัสความยืดหยุ่น
I	โมเมนต์ของความเฉื่อย
P	แรงกระทำแบบจุด กระทำในแนวดิ่งอยู่เสมอโดยไม่มีการติดตามการเสียรูป
L	ความยาวช่วงของอิลาสติกคา
α	ค่าคงที่สัดส่วนความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคา ที่แสดงตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริง ในกรณีที่ $\alpha < \beta$ ค่าคงที่สัดส่วนความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคา ที่แสดงตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงและตำแหน่งของแรงกระทำ ในกรณีที่ $\alpha = \beta$ ค่าคงที่สัดส่วนความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคา ที่แสดงตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริง ในกรณีที่ $\alpha > \beta$
β	ค่าคงที่สัดส่วนความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคา ที่แสดงตำแหน่งของแรงกระทำ ในกรณีที่ $\alpha < \beta$ ค่าคงที่สัดส่วนความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคา ที่แสดงตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงและตำแหน่งของแรงกระทำ ในกรณีที่ $\alpha = \beta$ ค่าคงที่สัดส่วนความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคา ที่แสดงตำแหน่งของแรงกระทำ ในกรณีที่ $\alpha > \beta$
θ	มุมหมุนของอิลาสติกคา
H_A	แรงในแนวราบที่จุด A
Q_A	แรงในแนวดิ่งที่จุด A
R_B	แรงในแนวดิ่งที่จุด B
M	โมเมนต์ดัด
N	แรงตามแนวแกน

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

V	แรงเฉือน ณ ตำแหน่งใด ๆ ของอิลาสติกคา
$\Delta\theta$	ค่าความแตกต่างของมุม ณ ตำแหน่งของสปริงที่จุด C
x	ระยะตามแนวราบของอิลาสติกคา
y	ระยะตามแนวดิ่งของอิลาสติกคา
x^*	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวราบของอิลาสติกคา
y^*	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวดิ่งของอิลาสติกคา
x_C	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงตามแนวราบของ ของอิลาสติกคา ในกรณีที่ $\alpha < \beta$
y_C	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงตามแนวดิ่ง ของอิลาสติกคา ในกรณีที่ $\alpha < \beta$
x_D	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงตามแนวราบของ ของอิลาสติกคา ในกรณีที่ $\alpha > \beta$
y_D	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงตามแนวดิ่ง ของอิลาสติกคา ในกรณีที่ $\alpha > \beta$
s	ความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคา
S_t	ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอิลาสติกคา
K	ค่าสติฟเนสของสปริง
$\bar{x}$	ระยะตามแนวราบของอิลาสติกคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{x} = \frac{x}{L}\right]$
$\bar{y}$	ระยะตามแนวดิ่งของอิลาสติกคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{y} = \frac{y}{L}\right]$
$\overline{x^*}$	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวราบของอิลาสติกคา แบบไร้หน่วย $\left[\overline{x^*} = \frac{x^*}{L}\right]$
$\overline{y^*}$	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวดิ่งของอิลาสติกคา แบบไร้หน่วย $\left[\overline{y^*} = \frac{y^*}{L}\right]$
$\bar{x}_C$	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงตามแนวราบของ ของอิลาสติกคาแบบไรหน่วย ในกรณีที่ $\alpha < \beta$ $\left[\bar{x}_C = \frac{x_C}{L}\right]$
$\bar{y}_C$	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงตามแนวดิ่ง ของอิลาสติกคาแบบไร้หน่วย ในกรณีที่ $\alpha < \beta$ $\left[\bar{y}_C = \frac{y_C}{L}\right]$

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

$\bar{x}_D$	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงตามแนวราบของ ของอิลาสติกคาแบบไร้หน่วย ในกรณีที่ $\alpha > \beta$ $\left[\bar{x}_D = \frac{x_D}{L}\right]$
$\bar{y}_D$	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงตามแนวดิ่ง ของอิลาสติกคาแบบไร้หน่วย ในกรณีที่ $\alpha > \beta$ $\left[\bar{y}_D = \frac{y_D}{L}\right]$
$\bar{s}$	ความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{s} = \frac{s}{L}\right]$
$\bar{S}_t$	ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอิลาสติกคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{S}_t = \frac{S_t}{L}\right]$
$\bar{P}$	แรงกระทำแบบจุด กระทำในแนวดิ่งอยู่เสมอโดยไม่มีการติดตามการเสียรูป แบบไร้หน่วย $\left[\bar{P} = \frac{PL^2}{EI}\right]$
$\bar{M}$	โมเมนต์ดัดแบบไร้หน่วย $\left[\bar{M} = \frac{ML}{EI}\right]$
$\bar{I}$	โมเมนต์ของความเฉื่อยแบบไร้หน่วย $\left[\bar{I} = \frac{I}{L^4}\right]$
$\bar{K}$	ค่าสติฟเนสของสปริงแบบไร้หน่วย $\left[\bar{K} = \frac{KL}{EI}\right]$

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

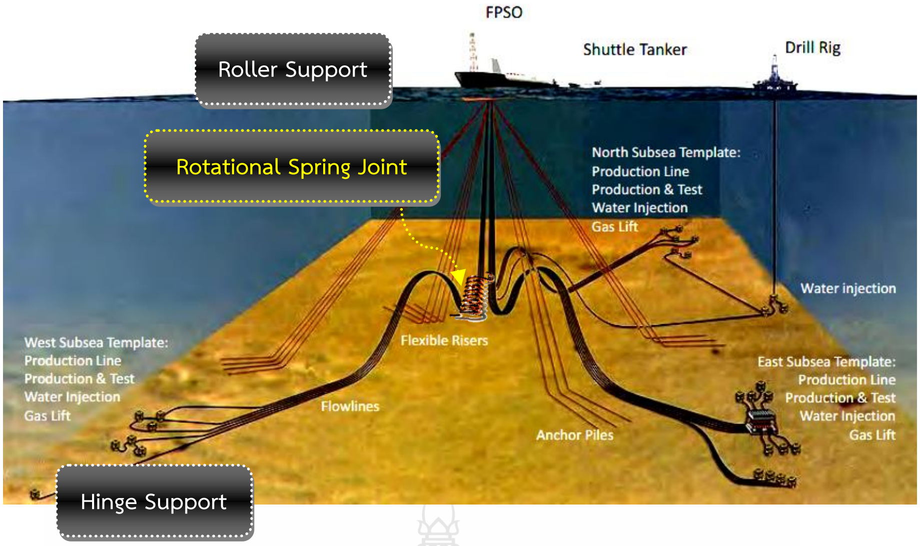
Arc - Length	ความยาวส่วนโค้ง
Boundary Condition	เงื่อนไขขอบเขต
Critical Load	น้ำหนักบรรทุกวิกฤติ
Differential Equation	สมการอนุพันธ์
Elastica	อิลาสติกคา
Elliptic Function	อีลิปติคฟังก์ชั่น
Elliptic - Integral Method	วิธีอีลิปติคอินทิกรัล
Equilibrium	สมดุล
Euler - Bernoulli	ทฤษฎีของออยเลอร์ - แบร์นูลี่
Finite Element Method	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
Flexural Rigidity	ความแข็งแรงของวัสดุต่อการดัด
Flowchart	แผนผังแสดงขั้นตอนของการทำงาน
Free - Body Diagram	ไดอะแกรมของชิ้นส่วนอิสระ
Geometric Relation	ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต
Governing Equation	สมการครอบคลุมของปัญหา
Homogenous Material	วัสดุที่เป็นเนื้อเดียวกัน
Instability	ความไร้เสถียรภาพ
Isotropic	คุณสมบัติของวัสดุ (E) ที่เท่ากันทุกทิศทาง
Large Deflection	การโก่งตัวมาก
Newton - Raphson Method	วิธีนิวตัน - ราฟสัน
Polycarbonate Sheet	แผ่นโพลีย์คาร์โบเนต
Runge - Kutta Method	วิธีรุงเง - คุตตา
Shooting Method	วิธียิงเป้า
Stable Equilibrium	สมดุลแบบมีเสถียรภาพ
Static	สถิตศาสตร์
Strain	ความเครียด
Stress	ความเค้น
Stiffness	ความต้านทานของวัสดุ
Tolerance	ความคลาดเคลื่อน
Total - Arc - Length	ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด
Unstable Equilibrium	สมดุลแบบไร้เสถียรภาพ
Variable - Arc - Length Elastica	อิลาสติกคาที่มีความส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

บทที่ 1
บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา วัตถุประสงค์ สมมติฐาน ขอบเขต ขั้นตอน และประโยชน์ของงานวิจัยชิ้นนี้ โดยที่งานวิจัยนี้เป็นการนำเอาลักษณะของโครงสร้างที่มีความชะลูดมาก เช่นท่อลำเลียงของไหล (Pipeline) ซึ่งพบได้บ่อยในอุตสาหกรรมขุดเจาะน้ำมัน มาทำการจำลองพฤติกรรมการแอ่นตัวมากในสภาวะที่อาจพบได้ อาทิเช่นในงานวิจัยนี้ได้คำนึงถึงการแอ่นตัวมากภายใต้สภาวะที่ท่อลำเลียงของไหลเกิดการหักงอ ซึ่งได้จำลองจุดที่หักงอเป็นจุดต้านทานการหมุนแบบสปริง (Rotational Spring Joint) แต่อย่างไรก็ตามเนื่องจากการจำลองดังกล่าวเป็นการจำลองโมเดลทางคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องตัดทอนตัวแปรบางประเภทออกไปเพื่อให้สามารถคำนวณได้ง่าย ซึ่งได้กล่าวถึงในสมมติฐานของงานวิจัย และเพื่อยืนยันผลในเชิงทฤษฎีงานวิจัยนี้ได้ทำการทดลองอย่างง่ายขึ้นเพื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณ ส่วนรายละเอียดต่าง ๆ ในบทนี้จะได้กล่าวถึงต่อไปดังนี้

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การขนส่งน้ำมันและก๊าซธรรมชาติในระยะเริ่มแรกนั้น สามารถทำได้ครั้งละปริมาณไม่มากนัก ส่วนใหญ่จะใช้วิธีการบรรจุลงในภาชนะขนาดเล็กก่อน หลังจากนั้นจึงขนส่งลำเลียงด้วยรถยนต์ เรือ และรถไฟที่ใช้บรรทุกสินค้าทั่ว ๆ ไป ต่อมาด้วยวิวัฒนาการทางด้านคมนาคมและประกอบกับความต้องการใช้น้ำมันและก๊าซธรรมชาติที่เพิ่มสูงขึ้น จึงได้มีการคิดค้นออกแบบกระบวนการขนส่งที่สามารถลำเลียงน้ำมันและก๊าซธรรมชาติในแต่ละครั้งได้ในปริมาณมาก ๆ (Bulk) โดยไม่ต้องบรรจุลงในภาชนะขนาดเล็กก่อน มีกระบวนการขนส่งลำเลียงอยู่ 4 ประเภทหลัก ๆ แต่กระบวนการขนส่งน้ำมันและก๊าซธรรมชาติจากหลุมผลิตไปยังสถานีชายฝั่งหรือโรงกลั่นที่มีประสิทธิภาพและสะดวกที่สุดคือการขนส่งลำเลียงทางท่อ (Pipeline) แต่การขนส่งลำเลียงด้วยกระบวนการดังกล่าวอาจเกิดความเสียหาย หรือเกิดการหักงอได้จากเหตุการณ์ต่าง ๆ เช่น แผ่นดินไหว สมอเรือเกี่ยวลาก ซึ่งในบริเวณที่ท่อเกิดการเสียหายหรือหักงอนั้นสามารถจำลองให้เป็นจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงที่อยู่ภายในช่วงของอิลาสติกคา ณ ตำแหน่งใด ๆ โดยที่จุดต้านทานการหมุนแบบสปริงทำหน้าที่ส่งถ่ายโมเมนต์ดัดตามความสัมพันธ์ $M = K\Delta\theta$ โดยจำลองให้ด้านที่มีจุดรองรับแบบยึดหมุนซึ่งเปรียบเทียบเป็นปลายของท่อส่งด้านที่ยึดติดกับแท่นที่ขุดเจาะใต้ทะเล และด้านจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานเปรียบเสมือนแท่นผลิตที่อยู่บนเรือเดินสมุทรซึ่งอยู่ที่ระดับผิวน้ำที่สามารถเลื่อนได้ทำให้ความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้



รูปที่ 1.1 ตัวอย่างของการประยุกต์ใช้กับงานท่อส่งน้ำมันและก๊าซธรรมชาติ (http://energyclaims.net)

สำหรับงานวิจัยนี้นำเสนอการศึกษา ผลของจุดยึดรั้งภายในต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุด ณ ตำแหน่งใด ๆ และมีจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงของอิลาสติกคา ณ ตำแหน่งใด ๆ โดยที่ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาถูกรองรับด้วยจุดรองรับที่หมุนได้อย่างอิสระ ส่วนที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางพาดอยู่บนจุดรองรับที่เลื่อนได้โดยไร้แรงเสียดทาน ในงานวิจัยนี้จะทำการวิเคราะห์ตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงแทนด้วยสัญลักษณ์ของ α ตำแหน่งของแรงที่กระทำแทนด้วยสัญลักษณ์ของ β ทั้งหมด 3 กรณี คือ กรณีที่ระยะ $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ และ $\alpha > \beta$ โดยทำการเปลี่ยนค่าสติฟเนส (K) ของสปริงเพื่อให้เกิดความต้านทานที่หลากหลาย โดยกำหนดค่า $\bar{K} = 1, 10$ และ 100 และเมื่ออิลาสติกคาเกิดการเสียรูปความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอิลาสติกคามีค่าไม่คงที่ โดยที่จุดต้านทานการหมุนแบบสปริงจะทำหน้าที่ส่งถ่ายโมเมนต์ดัดตามความสัมพันธ์ของ $M = K\Delta\theta$ ชุดสมการอนุพันธ์ครอบคลุมของปัญหาประกอบไปด้วยความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้ง ซึ่งพิจารณาผลของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงโดยอาศัยหลักของการสมดุลและความสัมพันธ์ของรูปร่างของอิลาสติกคา ในงานวิจัยนี้จะทำการหาคำตอบโดยใช้ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting Method) ซึ่งเป็นวิธีเชิงตัวเลข โดยระบบสมการทั้งหมดจะถูกอินทิเกรตด้วยระเบียบวิธีรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta Method) ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้งสองด้าน และสอดคล้องกับเงื่อนไขของสมการสมดุลที่จุดต้านทานการหมุนแบบสปริง

งานวิจัยนี้จะนำผลที่ได้จากคำนวณทางทฤษฎีของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุดกระทำ ณ ตำแหน่งใด ๆ และมีจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงของอิลาสติกคา ณ ตำแหน่งใด ๆ ไปเปรียบเทียบกับผลการคำนวณที่ได้จากทฤษฎีกรณีศึกษาอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน พร้อมทั้งนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดสอบตัวอย่างกรณีวัสดุเป็นแบบเชิงเส้นโดยใช้วัสดุเป็นแผ่นโพลีคาร์โบเนต (Polycarbonate Sheet) ซึ่งในการทดสอบตัวอย่างนั้นจะทำให้เห็นภาพของพฤติกรรมของโครงสร้างในลักษณะเช่นนี้ได้ชัดเจนมากขึ้น และยังเป็นการยืนยันความถูกต้องของผลการคำนวณที่ได้จากทางทฤษฎี

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อวิเคราะห์และหาคำตอบของปัญหาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคา

1.2.2 เพื่อศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุดที่มีจุดต้านทานการหมุนอยู่ภายในช่วงความยาวของอิลาสติกคา

1.2.3 เพื่อหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤติ (ถ้ามี) ของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุดที่มีจุดต้านทานการหมุนอยู่ภายในช่วงความยาวของอิลาสติกคา

1.2.4 เพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ทางทฤษฎีกับผลจากการทดสอบตัวอย่างกรณีที่วัสดุเป็นแบบเชิงเส้นโดยใช้วัสดุแผ่นโพลีคาร์โบเนต (Polycarbonate Sheet)

1.3 สมมติฐานในการวิเคราะห์

สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุด มีดังนี้

1.3.1 วัสดุของอิลาสติกคาสม่ำเสมอเป็นเนื้อเดียวกัน (Homogenous Material) มีคุณสมบัติทางกายภาพเหมือนกันในทุกทิศทาง (Isotropic) ตลอดความยาวของอิลาสติกคา

1.3.2 อิลาสติกคาไม่มีการยืดหรือหดตัวตามแนวแกนเมื่อรับแรง

1.3.3 แรงที่กระทำต่ออิลาสติกคาจะกระทำในแนวดิ่งอยู่เสมอโดยไม่มีการติดตามการเสียรูป

1.3.4 การแอ่นตัวของอิลาสติกคามีค่ามากในขณะที่ความเครียดมีค่าน้อย

1.3.5 คุณสมบัติของวัสดุมีลักษณะเป็นเชิงเส้นตามกฎความสัมพันธ์ของฮุค (Hooke’s Law)

1.3.6 ไม่พิจารณาผลอันเนื่องมาจากการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือน (Shear Deformation)

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

1.4.1 แบบจำลองของงานวิจัยนี้เป็นอิลาสติกคาช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ซึ่งมีจุดยึดรั้งภายในโดยสามารถจำลองให้เป็นจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงได้

1.4.2 วัสดุเป็นแบบเชิงเส้น สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดอยู่ในรูปของ $\sigma = E\varepsilon$ โดยที่ค่า E คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น

1.4.3 การทดสอบตัวอย่างโดยใช้วัสดุที่เป็นแผ่นโพลีคาร์โบเนต (Polycarbonate Sheet) ซึ่งเป็นวัสดุที่มีความยืดหยุ่นตัวดีแม้จะเกิดการเสียรูปมากก็ตาม

1.4.4 การทดสอบตัวอย่างจะใช้สปริงต้านทานการหมุนที่มีค่าสติฟเนส $\bar{K} = 2.15$

1.5 ขั้นตอนการวิจัย

งานวิจัยนี้ จะทำการวิเคราะห์ผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุด การแก้สมการครอบคลุมของปัญหาด้วยวิธียิงเป้าร่วมกับเทคนิคการอินทิกรัลเชิงตัวเลขแบบรุงเง - คุตตา โดยที่แบบจำลองของปัญหามีขั้นตอนการศึกษา คือ

1.5.1 ศึกษาคุณสมบัติของวัสดุที่เป็นเชิงเส้น

1.5.2 ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1.5.3 ศึกษาทฤษฎีการเสียรูปมากของอิลาสติกคา

1.5.4 ศึกษาระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting Method) และการอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta Method)

1.5.5 เขียนสมการครอบคลุมของปัญหา (Governing Equation) และกำหนดขอบเขตเงื่อนไขที่เหมาะสมในการหาคำตอบ (Boundary Condition)

1.5.6 เขียนโปรแกรมและหาคำตอบเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม MATLAB

1.5.7 เตรียมการทดสอบวัสดุอิลาสติกคาตัวอย่างและอุปกรณ์สำหรับใช้ทำการทดสอบ ซึ่งวัสดุที่ใช้ทำอิลาสติกคาตัวอย่างในงานวิจัยนี้จะใช้แผ่นโพลีคาร์โบเนต (Polycarbonate Sheet) ขนาดกว้าง 50 มม. ยาว 1,600 มม. หนา 2 มม. มีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุเท่ากับ 20,525 กก./ซม^2.

1.5.8 เปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากโปรแกรม MATLAB กับผลที่ได้จากการทดสอบอิลาสติกคาตัวอย่าง

1.5.9 สรุปผลการศึกษา

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.6.1 ทราบถึงพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุดที่มีจุดต้านทานการหมุนอยู่ภายในช่วงความยาวของอิลาสติกคา

1.6.2 ทราบผลเปรียบเทียบพฤติกรรมของการแอ่นตัวของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณทางทฤษฎีกับการแอ่นตัวของอิลาสติกคาที่ได้จากการทดลอง

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาผลของจุดต้านทานการต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุดซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปในบทนี้ ได้จำแนกงานวิจัยที่เกี่ยวข้องออกเป็นสองประเภทคือ อิลาสติกคาที่รับแรงตามแนวขวางซึ่งทำหน้าที่เป็นคานที่สามารถแอ่นตัวได้มาก และอิลาสติกคาที่รับแรงตามแนวแกนซึ่งทำหน้าที่เป็นเสาที่สามารถโก่งตัวได้มาก หลังจากนั้นจะกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้องซึ่งในที่นี้คือทฤษฎีอิลาสติกคานั่นเองและพฤติกรรมการถ่ายโมเมนต์ดัดของสปริงหมุนได้กล่าวถึงในบทนี้เช่นกัน

2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในอดีตที่ผ่านมางานวิจัยที่เกี่ยวกับการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาและปัญหาทางอิลาสติกคาได้มีผู้ทำการศึกษาเอาไว้เป็นจำนวนมาก โดยแบ่งไปตามลักษณะของโครงสร้างที่ถูกน้ำหนักบรรทุกกระทำ และสามารถแบ่งย่อยออกเป็นกลุ่มต่าง ๆ คือ การศึกษาเกี่ยวกับการแอ่นตัวของอิลาสติกคา การศึกษาและวิเคราะห์ถึงพฤติกรรมก่อนและหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคา ดังนี้

2.1.1 การศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

ในกรณีที่แรงกระทำมีทิศทางกระทำในแนวขวางกับทิศทางการวางตัวของอิลาสติกคา พฤติกรรมของอิลาสติกคามีลักษณะเป็นอิลาสติกคาวางบนจุดรองรับ และแรงกระทำในรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งโดยส่วนมากจะพบน้ำหนักบรรทุกวิกฤติเมื่ออิลาสติกคาแอ่นตัวไปได้ในระดับนึง โดยงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับอิลาสติกคาในลักษณะนี้ได้แก่

สุรพันธ์ บุญเจริญ [1] ได้ทำการศึกษาการวิเคราะห์การแอ่นตัวของอิลาสติกคาโดยวิธีอิลิปติคอินทิกรัล ซึ่งปลายข้างหนึ่งของอิลาสติกคามีจุดรองรับแบบข้อหมุน ส่วนปลายอีกข้างหนึ่งมีจุดรองรับไร้แรงเสียดทานและอิลาสติกคาสามารถเคลื่อนผ่านได้อย่างอิสระ โดยแบ่งการวิเคราะห์ออกเป็น 3 วิธี คือ กรณีแรงกระทำที่จุดกึ่งกลาง กรณีโมเมนต์ดัดกระทำที่จุดรองรับแบบข้อหมุน และกรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลาย ผลจากการวิเคราะห์ทั้ง 3 กรณีเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการวิเคราะห์แบบไฟไนท์-เอเลเมนต์พบว่าสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

Chucheepsakul และคณะ [2] ได้ทำการศึกษาการแอ่นตัวของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ภายใต้โมเมนต์ดัดที่มีทิศทางตรงข้ามกันกระทำที่ปลายอิลาสติกคาทั้งสองด้าน โดยจะพิจารณาการแอ่นตัวของอิลาสติกคาตามการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัดที่ปลายอิลาสติกคาทั้งสอง ซึ่งจุดรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบหมุนอิสระส่วนอีกด้านหนึ่งเป็นจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน สำหรับกระบวนการวิเคราะห์และหาคำตอบของบทความนี้มี 2 วิธี คือ ใช้ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขด้วยวิธีการยิงเป้า และการหาคำตอบแบบแม่นตรงด้วยวิธอีลิปติคอินทิกรัล ผลที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้ปรากฏว่าทั้งสองวิธีมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก

Chucheepsakul และคณะ [3] ได้ทำการศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้โมเมนต์ดัดกระทำที่ปลายอิลาสติกคา โดยอิลาสติกคาด้านหนึ่งเป็นแบบหมุนอิสระ ส่วนอีกด้านหนึ่งเป็นจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีอีลิปติค-อินทิกรัลในการวิเคราะห์หาคำตอบ ซึ่งทั้งสองวิธีนี้ใช้สำหรับหาค่าการแอ่นตัว, ค่าความยาวส่วนโค้ง, ค่าโมเมนต์และค่ามุมที่เปลี่ยนแปลงที่จุดรองรับ ซึ่งผลที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้ปรากฏว่าทั้งสองวิธีมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก และผลจากการวิเคราะห์ด้วยวิธีอีลิปติคอินทิกรัลพบว่าค่าโมเมนต์ค่าหนึ่งจะสามารถเกิดสภาวะสมดุลได้สองรูปแบบ คือ สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพและแบบไม่มีเสถียรภาพ

จีระพงษ์ เทพพิทักษ์ [4] ได้ทำการศึกษาการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคามีค่าไม่คงที่ ปลายข้างหนึ่งของอิลาสติกคาเป็นจุดรองรับแบบข้อหมุน ส่วนปลายอีกข้างหนึ่งพาดอยู่บนจุดรองรับไร้แรงเสียดทาน เมื่อเกิดการแอ่นตัวมากปลายอิลาสติกคาข้างนี้สามารถเคลื่อนผ่านจุดรองรับได้อย่างอิสระ น้ำหนักบรรทุกที่กระทำบนอิลาสติกคาแบ่งออกเป็น 4 กรณี คือ กรณีน้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำที่ตำแหน่งใด ๆ กรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางตรงกันข้าม กรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางตรงกันข้ามและมีน้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำที่ตำแหน่งใด ๆ และกรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางเดียวกัน ซึ่งทำการแก้ปัญหาด้วยวิธีอิลิปติคอินทิกรัล และจากการวิเคราะห์อิลาสติกคาเมื่ออยู่ภายใต้น้ำหนักบรรทุกดังกล่าวข้างต้นสามารถหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤติ และตำแหน่งสมดุลสถิตย์แบบเสถียรภาพและแบบไร้เสถียรภาพของอิลาสติกคาได้

Wang และคณะ [5] ได้ทำการศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำ ณ ตำแหน่งใด ๆ ตามแนวแกนราบของอิลาสติกคา โดยที่อิลาสติกคามีจุดรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบยึดหมุนด้วยสปริงต้านทางการหมุน ส่วนอีกด้านหนึ่งเป็นจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยทำการวิเคราะห์และหาคำตอบของค่าการแอ่นตัว, ค่าโมเมนต์ และค่าของมุมที่เปลี่ยนแปลงที่จุดรองรับด้วยวิธีการยิงเป้าและวิธีอีลิปติคอินทิกรัล ซึ่งผลที่ได้จากสองวิธีดังกล่าวมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก

ทินกร มนต์ประภัสสร [6] ได้ทำการศึกษาการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยคำนึงถึงผลของการยึดรั้งและความเสียดทานของที่รองรับและผลของแรงเฉือน ในงานวิจัยดังกล่าวทำการศึกษาสภาวะการรับแรง 3 กรณี คือ กรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางตรงกันข้าม กรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางเดียวกัน และกรณีน้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำที่ตำแหน่งใด ๆ โดยอิลาสติกคาทั้ง 3 ประเภทนี้มีจุดรองรับแบบข้อหมุนยึดด้วยสปริงต้านการหมุนแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นที่ปลายข้างหนึ่ง ส่วนปลายของอิลาสติกคาอีกข้างหนึ่งพาดอยู่บนจุดรองรับแบบมีแรงเสียดทาน สำหรับวิธีที่ผู้ทำการศึกษาใช้วิเคราะห์และหาคำตอบมี 2 วิธี คือ วิธีการยิงเป้าและวิธีอิลิปติคอินทิกรัล

Chucheepsakul และคณะ [7] ได้ทำการศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ภายใต้โมเมนต์ดัดกระทำที่ปลายอิลาสติกคาในทิศทางเดียวกัน โดยหาคำตอบด้วยวิธีการยิงเป้าและวิธีอิลิปติคอินทิกรัล จากผลการวิเคราะห์พบว่าเมื่อค่าสัดส่วนระหว่างโมเมนต์ดัดที่ปลายพาดผ่านจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน β มีค่าเพิ่มขึ้นค่าโมเมนต์วิกฤติก็จะมีค่าเพิ่มขึ้น

บุญชัย ผึ้งไผ่งาม [8] ได้ทำการศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกเอียงที่มีการเปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของอิลาสติกคา โดยที่ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาเป็นจุดรองรับแบบหมุน ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งของอิลาสติกคายอมให้มีการเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระบนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน เมื่อเกิดการเสียรูปความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอิลาสติกคามีค่าที่ไม่คงที่ โดยหาคำตอบด้วยวิธีอิลิปติคอินทิกรัลและวิธีการยิงเป้า ซึ่งทั้งสองวิธีให้ผลที่ใกล้เคียงกันมาก

กอปร์ชัย ศิริตระกูลมั่งคั่ง [9] ได้ศึกษาการหาคำตอบทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้ระบบพิกัดลากรานจ์ โดยนำเสนอวิธีการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีสมบัติอ่อนตัว อิลาสติกคาที่วิเคราะห์แบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ อิลาสติกคาช่วงเดียวที่ศึกษา 2 กรณี คือ อิลาสติกคาช่วงเดียวที่ดัดผ่านที่รองรับแบบไร้แรงเสียดทาน และอิลาสติกคาช่วงเดียวที่ดัดผ่านที่รองรับแบบข้อหมุนยึดด้วยสปริงต้านการหมุน ส่วนอิลาสติกคาประเภทที่สองนั้นเป็น อิลาสติกคายื่นที่มีจุดรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบยึดแน่น ส่วนปลายอิลาสติกคาอีกด้านหนึ่งเป็นแบบอิสระ ตำแหน่งจุดรองรับของอิลาสติกคาจะกำหนดด้วยระบบพิกัดลากรานจ์ ระยะระหว่างจุดรองรับคือความยาวช่วงของอิลาสติกคาซึ่งมีค่าคงที่ แต่ความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้อิลาสติกคาจะถูกกระทำด้วยน้ำหนักบรรทุกแบบจุด หรือน้ำหนักบรรทุกแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอ หรือโมเมนต์ดัดกระทำที่ปลายทั้งสองข้าง หรือน้ำหนักบรรทุกแบบผสม แล้วหาสมการสมดุลของอิลาสติกคาที่ถูกกระทำด้วยน้ำหนักบรรทุกแบบต่าง ๆ การแก้ปัญหาในการวิจัยนี้ใช้ วิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์และใช้วิธีการกระทำซ้ำของนิวตัน - ราฟสัน (Newton - Raphson) เพื่อหาคำตอบของสมการไร้เชิงเส้น ผลการวิเคราะห์ที่ได้จากงานวิจัยนี้ ได้นำมาตรวจสอบและเปรียบเทียบกับการวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้ระบบพิกัดออยเลอร์พบว่ามีความถูกต้องใกล้เคียงกันสามารถเชื่อถือได้

นฤพนธ์ ศิลาภากุล [10] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่ทำจากวัสดุแบบไม่เป็นเชิงเส้น โดยทำการศึกษาสภาวะการรับแรงอยู่ 3 ประเภท คือ น้ำหนักบรรทุกกระทำแบบจุดกระทำที่ตำแหน่งใด ๆ ในแนวตั้งฉากกับแนวราบไม่เปลี่ยนแปลงตามการเสียรูป น้ำหนักบรรทุกกระทำแบบแรงอัดที่ปลายอิลาสติกคา มีทิศทางเปลี่ยนแปลงตามการเสียรูป และน้ำหนักบรรทุกกระทำที่เป็นแรงอัดกระทำที่ปลายอิลาสติกคาไม่เปลี่ยนแปลงตามการเสียรูปโดยหาคำตอบด้วยวิธียิงเป้า จากผลการวิเคราะห์พบว่าอิลาสติกคาที่มีค่าคงที่ของวัสดุประเภทลุดวิก (n) ที่มีค่ามากอิลาสติกคาจะเกิดการแอ่นตัวมากกว่าอิลาสติกคาทีมีค่าคงที่ของวัสดุประเภทลุดวิก (n) ที่มีค่าน้อยเมื่อพิจารณาที่ค่าน้ำหนักบรรทุกที่เท่ากันและแบบจำลองเดียวกัน

Phungpaingam และคณะ [11] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาอย่างง่ายที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่เปลี่ยนแปลงตามการเสียรูปของอิลาสติกคา โดยการหาคำตอบด้วยวิธียิงเป้าและวิธีอิลิปติคอินทิกรัล จากผลการวิเคราะห์พบว่าค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดมีค่าเท่ากับ 8.422

Pulngern และคณะ [12] ได้ศึกษาการแอ่นตัวของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ โดยการหาคำตอบมีทั้งหมด 3 วิธี คือ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีการยิงเป้า และทฤษฎีของอิลาสติกคาแบบเชิงเส้น จากผลการวิเคราะห์พบว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีการยิงเป้ามีค่าการแอ่นตัวที่จุดกึ่งกลางอิลาสติกคามากกว่าค่าที่ได้จากทฤษฎีของอิลาสติกคาแบบเชิงเส้นเมื่อพิจารณาค่าน้ำหนักบรรทุกตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอตั้งแต่ 2.0 ขึ้นไป

Athisakul และ Chuchepsakul [13] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ และทำการหาคำตอบด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีการยิงเป้า จากการวิเคราะห์ผลพบว่าการยกหรือลดระดับของจุดรองรับมีผลต่อค่าน้ำหนักตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ เมื่อยกระดับจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานค่าน้ำหนักตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ ณ สภาวะวิกฤติมีค่าเพิ่มขึ้น และหากลดระดับจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานค่าน้ำหนักตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ ณ สภาวะวิกฤติมีค่าลดลง

กฤษณะชัย จันทรกอง [14] ได้ทำการศึกษาการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้วัสดุมีคุณสมบัติแบบไม่เป็นเชิงเส้น ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบต่าง ๆ อิลาสติกคามีจุดรองรับเป็นจุดยึดหมุนที่ปลายข้างหนึ่ง ส่วนปลายอิลาสติกคาอีกข้างจะพาดผ่านจุดรองรับที่ไม่มีแรงเสียดทาน ความยาวช่วงของอิลาสติกคาจะคงที่ ส่วนความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคาจะแปรเปลี่ยนตามน้ำหนักที่มากระทำต่ออิลาสติกคา การศึกษาในครั้งนี้พิจารณาน้ำหนักบรรทุกที่มากระทำต่ออิลาสติกคา 3 ลักษณะ คือภายใต้น้ำหนักบรรทุกตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ ภายใต้โมเมนต์ดัดที่มีทิศทางการดัดตรงข้ามกัน และภายใต้โมเมนต์ดัดที่มีทิศทางการดัดทางเดียวกัน โดยใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้าในการหาคำตอบเชิงตัวเลข

2.1.2 พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่รับแรงตามแนวแกน

ในกรณีที่มีแรงกระทำอัดตามแนวแกนของอิลาสติกคา พฤติกรรมของอิลาสติกคาจะมีลักษณะที่คล้ายเสา ซึ่งจะเกิดการโก่งเดาะก่อน เมื่อเกิดการโก่งเดาะแล้วพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะได้ถูกศึกษาในงานวิจัยต่าง ๆ ดังนี้

สุนทร เกียรติคงศักดิ์ [15] ได้ทำการศึกษาถึงพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาอย่างง่ายใต้สภาพการยึดรั้งที่ปลาย โดยที่ปลายทั้งสองข้างหมุนได้ตามเงื่อนไขของจุดรองรับซึ่งกำหนดแรงอัดเข้ากระทำที่ปลายของอิลาสติกคา และวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้โปรแกรม ABAQUS ซึ่งเป็นโปรแกรมที่สร้างขึ้นโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนล์เอลิเมนต์ และนำผลที่ได้ไปตรวจสอบกับผลที่ได้จากวิธีการยิงเป้า

ณัฐฏ์ พิชัยยุทธ์ [16] ได้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีจุดหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงความยาวของอิลาสติกคา โดยปลายด้านหนึ่งวางพาดอยู่บนจุดรองรับแบบหมุนและที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางอยู่บนจุดรองรับแบบสลีฟ ทำการหาคำตอบด้วยวิธีการยิงเป้าและเปรียบเทียบรูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณกับการทดลอง ผลที่ได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

Phungpaingam และ Chucheepsakul [17] ได้เสนอผลเฉลยในรูปแบบปิดของพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีจุดหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงความยาวของอิลาสติกคา ได้พบว่าเมื่อค่าสติฟเนสของสปริงหมุนมีค่าเป็นศูนย์รูปร่างของอิลาสติกคาภายหลังการโก่งเดาะมีถึงสามรูปแบบที่แตกต่างกันและพบการโก่งเดาะลำดับที่สอง

จากการที่ได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งหมดพบว่าการศึกษาพฤติกรรมของอิลาสติกคาที่มีจุดต่อภายในช่วงความยาวของอิลาสติกคามีการศึกษาค่อนข้างน้อย และจุดต่อภายในช่วงความยาวของอิลาสติกคาอาจเกิดขึ้นได้เนื่องจากความไม่สมบูรณ์ในการถ่ายโมเมนต์ภายใน เช่นการเกิดการแตกร้าวในบริเวณจุดดังกล่าวเป็นต้น ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้พิจารณาจุดต่อที่มีลักษณะเป็นสปริงแบบหมุนเพื่อศึกษาพฤติกรรมของอิลาสติกคาเมื่อจุดต่อสปริงหมุนมีสภาพความต้านทานการหมุน (Stiffness) ที่แตกต่างกัน

2.2 สมการการโก่งตัวมากในกรณีที่วัสดุเป็นแบบเชิงเส้น

ทฤษฎีการแอ่นตัวซึ่งโดยทั่วไปจะพิจารณาภายใต้ข้อจำกัดการแอ่นตัวที่มีค่าน้อยเป็นที่รู้จักกันในชื่อสมการของออยเลอร์และเบอร์นูลลี่ (Euler - Bernoulli) $d^2y/dx^2 = M / EI$ เมื่อพิจารณาการแอ่นตัวมากจึงจำเป็นต้องพิจารณาสมการที่เหมาะสม โดยเรียกทฤษฎีดังกล่าวว่าทฤษฎีอิลาสติกคา (Elastica Theory) ซึ่งสามารถเขียนสมการอนุพันธ์ที่อธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างการแอ่นตัวต่อแรงที่กระทำ (ในรูปของโมเมนต์ดัด) ได้ดังนี้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} \tag{2.1}$$

เมื่อ

M คือ โมเมนต์ดัด

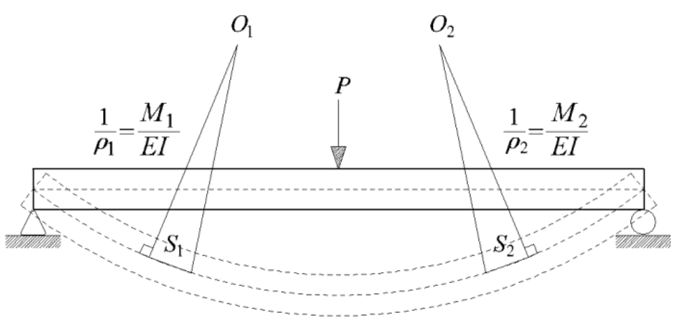
I คือ โมเมนต์ของความเฉื่อย

E คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น

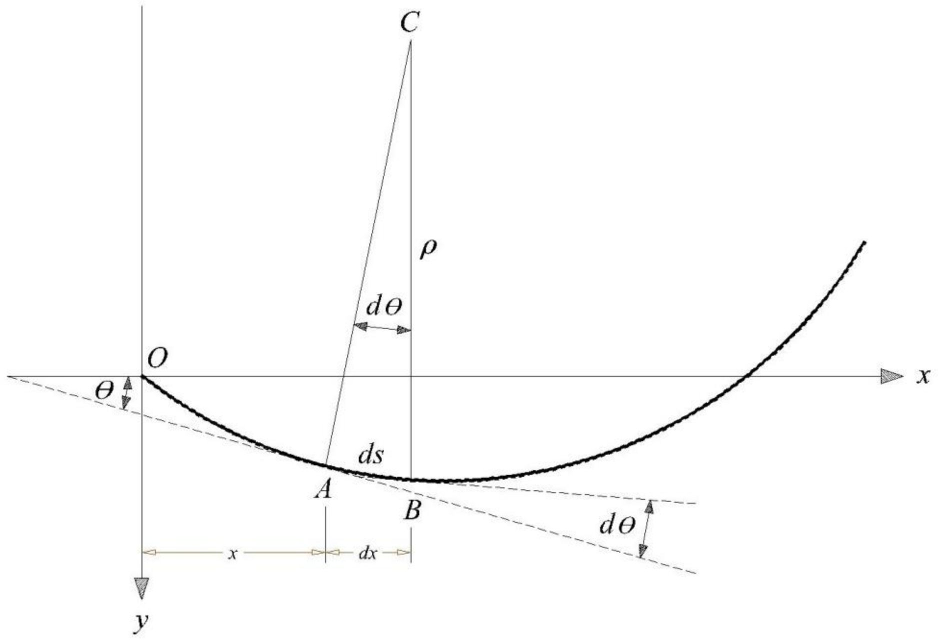
ρ คือ รัศมีความโค้งของระนาบสะเทินของอิลาสติกคา

สำหรับอิลาสติกคาที่มีค่า M เปลี่ยนไปตามความยาวของอิลาสติกคายังคงถือว่าสมการข้างต้นใช้ได้สำหรับทุกส่วนของอิลาสติกคา โดยที่ ρ จะเปลี่ยนไปตามค่าของ M ของแต่ละหน้าตัดอิลาสติกคาดังแสดงในรูปที่ 2.1 รัศมีความโค้งของส่วน S_1 และ S_2 จะมีค่าเท่ากับ $1/\rho_1 = M_1/EI$ และ $1/\rho_2 = M_2/EI$ ตามลำดับ

ซึ่งเส้นโค้งของระนาบสะเทินของอิลาสติกคา ที่เปลี่ยนรูปไปจากเส้นตรงเดิมก่อนการรับน้ำหนักบรรทุกนี้เรียกว่า "เส้นโค้งยืดหยุ่นหรือเส้นโก่ง" ของอิลาสติกคา ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ความสัมพันธ์ของเส้นโค้งยืดหยุ่นและโมเมนต์ดัดของอิลาสติกคา



รูปที่ 2.2 รูปร่างของอิลาสติกคาเมื่อเกิดการเสียรูป (ลักษณะการโก่งตัวของอิลาสติกคา)

พิจารณาเส้นโค้งยืดหยุ่นของอิลาสติกคาใด ๆ ในรูปที่ 2.2 โดยสมมุติให้ระนาบสะเทินของอิลาสติกคาก่อนรับน้ำหนักบรรทุกเป็นแกน x และแกน y มีค่าเป็นบวกในทิศทางลงและ ds เป็นส่วนเล็ก ๆ บนเส้นโค้งยืดหยุ่นซึ่งมีปลายด้านซ้ายห่างจากจุด O เป็นระยะ x และมีความยาวตามแนวแกน $x = dx$

โดยถือว่า ds เป็นส่วนโค้งของวงกลมที่มีรัศมีความโค้ง ρ จุดศูนย์กลางที่ C และมุม ds ทำกับจุดศูนย์กลางเท่ากับ $d\theta$ เท่ากับมุมที่เส้นสัมผัสที่ปลายทั้งสอง (A และ B) ของ ds ตัดกัน ถ้า θ_A, θ_B เท่ากับมุมที่เส้นสัมผัสของเส้นโค้งยืดหยุ่นที่ A และ B (ทำกับแกน x) ตามลำดับ จึงเรียก θ_A และ θ_B ว่าความลาด (Slope) ของอิลาสติกคาที่จุด A และ B

เมื่อ $\theta_{AB} = d\theta =$ มุมที่เปลี่ยนไป หรือความลาดที่เปลี่ยนไประหว่างจุด A และ B ของอิลาสติกคา ดังนั้นจากรูปที่ 2.2 จะได้สมการ

$$ds = \rho d\theta \tag{2.2}$$

หรือจัดรูปสมการใหม่เป็น

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \tag{2.3}$$

และจากสมการความโค้งเว้าจากหลักทางคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{2.4}$$

โดยสมมติให้อิลาสติกคารับแรงในช่วงยืดหยุ่นมีการโก่งตัวน้อยมาก (ระยะโก่งมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาวของอิลาสติกคา) ดังนั้น ค่า dy/dx จะมีค่าน้อย และค่า $(dy/dx)^2$ ยิ่งมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ 1 ทำให้สามารถละทิ้งเทอมกำลังสองได้

ดังนั้น ทำให้สมการที่ (2.4) กลายเป็นสมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้นซึ่งเรียกว่าสมการออย์เลอร์แบร์นูลี่ (Euler - Bernoulli) ดังนี้

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{2.5}$$

จากรูปที่ 2.2 เมื่อพิจารณาชิ้นส่วนเล็ก ๆ จะได้ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของชิ้นส่วน ds ดังนี้

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta \tag{2.6ก}$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta \tag{2.6ข}$$

โดยที่

dx คือ ระยะทางในแนวแกนราบของชิ้นส่วนเล็ก ๆ ของอิลาสติกคา

dy คือ ระยะการแอ่นตัวของชิ้นส่วนเล็ก ๆ ของอิลาสติกคา

ds คือ ความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนเล็ก ๆ ของอิลาสติกคา

ดังนั้น สมการที่ (2.1), (2.6ก) และ (2.6ข) ประกอบกันเป็นสมการครอบคลุมปัญหาสำหรับอิลาสติกคา ซึ่งใช้อธิบายการแอ่นตัวของอิลาสติกคาที่จุดใดจุดหนึ่งเท่านั้น หากต้องการทราบถึงพฤติกรรมโดยรวมของอิลาสติกคาต้องอินทิเกรตสมการที่ (2.1), (2.6ก) และ (2.6ข) ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา ซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขเพื่อให้สะดวกต่อการคำนวณ

ในงานวิจัยนี้ ได้พิจารณาถึงผลกระทบของสปริงต้านทานการหมุนที่อยู่ภายในช่วงความยาวของอิลาสติกคา ดังนั้นการพิจารณาพฤติกรรมการถ่ายโมเมนต์ดัดของสปริงหมุนจึงจำเป็นอย่างยิ่ง จากรูปที่ 2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและผลต่างของมุมที่จุดต้านทานการหมุนแบบสปริงที่เป็นเชิงเส้นแสดงในสมการดังนี้

$$M = K\Delta\theta \tag{2.7}$$

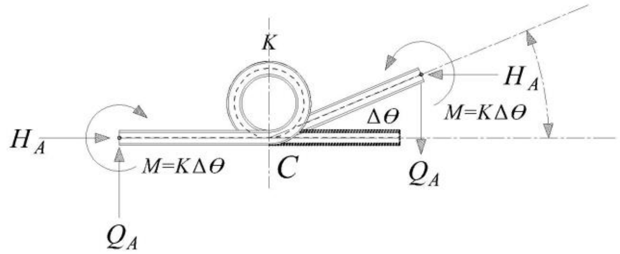
โดยที่

M คือ โมเมนต์ดัดของสปริงหมุน

K คือ ค่าสติฟเนสของสปริง

$\Delta\theta$ คือ ค่าความแตกต่างของมุม ณ ตำแหน่งสปริง (จุด C)

(ก)



(ข)

รูปที่ 2.3 รูปร่างและพฤติกรรมของสปริงหมุนเมื่อมีแรงกระทำ (สมดุลที่จุด C) (ก) ภาพถ่ายสปริงต้านทานการหมุนที่ใช้ในการทดลอง (ข) ภาพวาดแบบจำลองของสปริงหมุน

ในรูป 2.3 (ก) เป็นสปริงต้านทานการหมุนที่ใช้ในการทดลอง ซึ่งจำเป็นต้องทราบค่าสติฟเนสของสปริงก่อน ดังนั้นจึงได้ทำการทดลองหาค่าสติฟเนสของสปริงหมุนซึ่งจะกล่าวต่อไปในบทที่ 4

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ผลลัพธ์ในงานวิจัยนี้ได้มาจากสองส่วนด้วยกันคือ ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้มาจากทฤษฎีการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคา และผลการทดลองอย่างง่ายเพื่อเปรียบเทียบรูปร่างของอิลาสติกคาที่เกิดขึ้น โดยผลการคำนวณทางทฤษฎีนั้นอาศัยสมการสมดุลของอิลาสติกคา ความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งและโมเมนต์ และความสัมพันธ์ของรูปร่างทางเรขาคณิต ซึ่งทั้งสามส่วนนี้ประกอบกันเป็นสมการครอบคลุมปัญหา ซึ่งเป็นระบบสมการอนุพันธ์ที่ไร้เชิงเส้นที่กำหนดพฤติกรรมของอิลาสติกคาเพียงจุดเล็ก ๆ เท่านั้นหากต้องการทราบถึงพฤติกรรมโดยรวมทั้งหมดจำเป็นต้องมีการอินทิเกรต ซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลข ภายหลังจากการอินทิเกรตแล้วเงื่อนไขที่ปลายทั้งสองด้านและเงื่อนไขบริเวณจุดหมุนต้องสอดคล้องกับปัญหาที่ตั้งขึ้น ผลการคำนวณที่ได้จะถูกนำมาเรียบเรียงและนำเสนอในรูปแบบของความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ที่สนใจเช่น ความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนตัวและรูปร่างสมดุล เป็นต้น ในงานวิจัยนี้ได้จำลองสถานการณ์ของจุดหมุนและแรงกระทำไว้ด้วยกันสามรูปแบบคือ แรงที่กระทำอยู่ทางด้านซ้ายมือของจุดหมุน แรงที่กระทำอยู่ด้านขวามือของจุดหมุน และแรงที่กระทำอยู่ตรงกับจุดหมุน ผลลัพธ์ของทั้งสามรูปแบบจะนำไปวิเคราะห์และเปรียบเทียบรูปร่างของอิลาสติกคากับการทดลองอย่างง่ายในบทต่อไป

3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

สมการของโมเมนต์และความโค้งได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด โดยคุณสมบัติของวัสดุเป็นไปตามกฎความสัมพันธ์ของฮุค (Hooke’s law) ดังนี้

$$\sigma = E\varepsilon \tag{3.1}$$

เมื่อ

σ คือ ความเค้น

ε คือ ความเครียด

E คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น

3.2 แบบจำลองของปัญหา

โครงสร้างที่ทำการศึกษาในครั้งนี้ มีลักษณะเป็นอิลาสติกคาช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ และมีค่าความแข็งแรงของวัสดุต่อการดัด (Flexural Rigidity) เท่ากับ EI ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาวางอยู่บนจุดรองรับแบบข้อหมุน (ที่จุด A) ส่วนที่ปลายของอิลาสติกคาอีกด้านหนึ่งวางพาดอยู่บนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน (ที่จุด B) และเมื่ออิลาสติกคาเกิดการแอ่นตัวมากปลายของ อิลาสติกคาด้านนี้สามารถเคลื่อนผ่านจุดรองรับได้อย่างอิสระ จุดรองรับทั้งสองมีระยะห่างกันเท่ากับ L และในอิลาสติกคามีจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงอยู่ภายใน (ที่จุด C ในกรณีที่ $\alpha < \beta$

และที่จุด D ในกรณีที่ $\alpha > \beta$) ซึ่งมีระยะห่างจากจุดรองรับ A เป็นระยะเท่ากับ αL ใด ๆ และบนอิลาสติกคามีแรงแบบจุด (P) กระทำซึ่งมีระยะห่างจากจุดรองรับ A เป็นระยะเท่ากับ βL และเมื่ออิลาสติกคาเกิดการเสียรูปที่ปลายด้าน A และ B อิลาสติกคาหมุนไปเป็นมุม θ_A และ θ_B ตามลำดับ โดยที่มุมเหล่านี้วัดเทียบกับแนวราบ หลังจากการเสียรูปตำแหน่งของจุดต้านการหมุนแบบสปริงจะเปลี่ยนจากตำแหน่ง $(\alpha L, 0)$ มาเป็น $(x_C, y_C$ และ $x_D, y_D)$ และตำแหน่งของแรงกระทำจะเปลี่ยนจากตำแหน่ง $(\beta L, 0)$ มาเป็น (x^*, y^*) โดยตำแหน่งที่เปลี่ยนไปเหล่านี้วัดจากปลายด้าน A ตามแนวราบและแนวดิ่ง

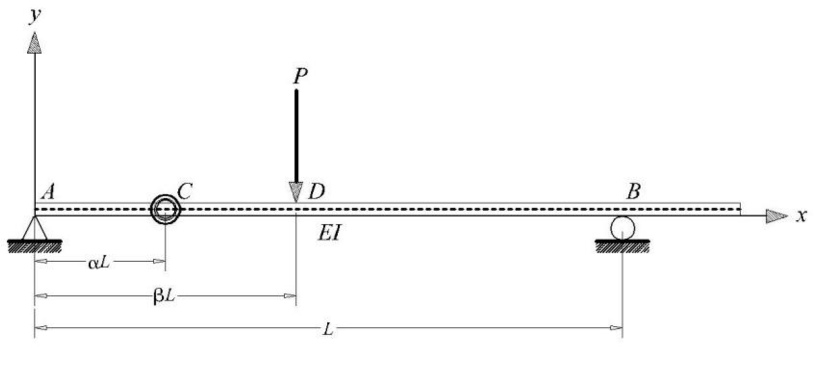
ในงานวิจัยนี้จะทำการวิเคราะห์ตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริง (α) และตำแหน่งของแรงที่กระทำ (β) ทั้งหมด 3 กรณี ดังนี้คือ

1. กรณีที่ระยะ $\alpha < \beta$
2. กรณีที่ระยะ $\alpha = \beta$
3. กรณีที่ระยะ $\alpha > \beta$

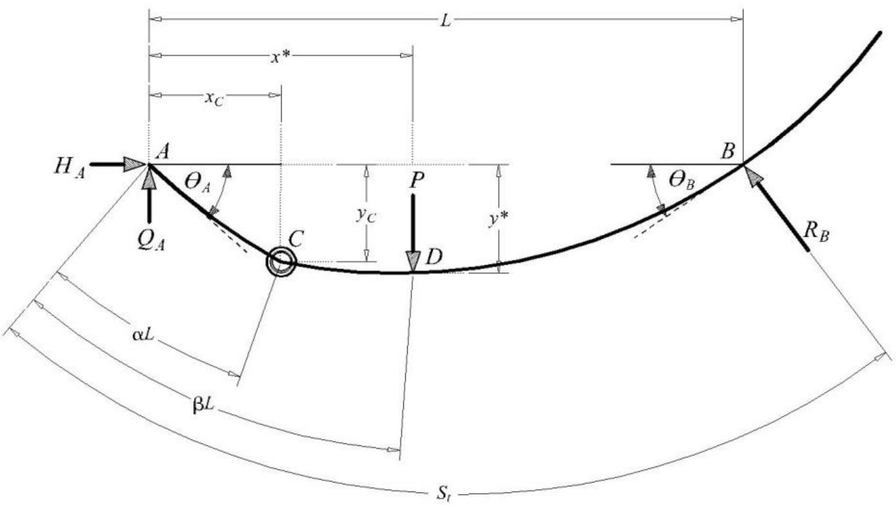
โดยที่ทั้ง 3 กรณีจะทำการเปลี่ยนค่าสติฟเนส (K) ของสปริงเท่ากับ 1, 10 และ 100 เพื่อให้เกิดความต้านทานที่แตกต่างกัน

3.2.1 ลักษณะแบบจำลองของอิลาสติกคาในกรณีที่ 1

ในกรณีที่ 1 เป็นกรณีที่ตำแหน่งของแรงกระทำอยู่ทางด้านขวามือของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงดังแสดงในรูปที่ 3.1 และ 3.2 ซึ่งทำให้มีโมเมนต์ดัด 3 ช่วงด้วยกันคือ $M_1^{(1)}, M_2^{(1)}, M_3^{(1)}$ ซึ่งสอดคล้องกับช่วง AC, CD และ DB ตามลำดับ



รูปที่ 3.1 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะก่อนการเสียรูป กรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$



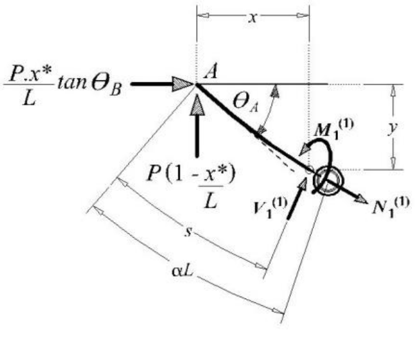
รูปที่ 3.2 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะหลังการเสียรูป กรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$

จากรูปที่ 3.1 และ 3.2 ใช้สมการสภาวะสมดุลคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับได้ ดังนี้

$$R_B = \frac{P.x^*}{L\cos\theta_B} \tag{3.2}$$

$$H_A = \frac{P.x^*}{L}\ .\ \tan\theta_B \tag{3.3}$$

$$Q_A = P\left(1 - \frac{x^*}{L}\right) \tag{3.4}$$



รูปที่ 3.3 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาในกรณีที่ 1 ระยะ $\alpha < \beta$ ในช่วงพิจารณาที่ $0 \le s \le \alpha L$

เมื่อพิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาจากรูปที่ 3.3 สามารถเขียนสมการสมดุลของโมเมนต์ดัดในช่วง AC หรือ $M_1^{(1)}$ ได้ดังนี้

$$M_1^{(1)} = \left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.y\right) + \left(\left(P\left(1 - \frac{x^*}{L}\right)\right).x\right) \tag{3.5}$$

จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับความโค้งของอิลาสติกคาและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตในสมการที่ (2.1) เมื่อนำสมการที่ (3.5) แทนค่าลงไปจะได้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_1^{(1)}}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.y\right) + \left(\left(P\left(1 - \frac{x^*}{L}\right)\right).x\right)\right] \tag{3.6}$$

ดังนั้น จะได้สมการที่ (3.6) (2.6ก) และ (2.6ข) เป็นสมการครอบคลุมปัญหา (Governing Equation) ซึ่งสามารถเขียนสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \left[\overline{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.\bar{y} + \overline{P}.(1 - \overline{x^*}).\bar{x}\right] \tag{3.7ก}$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos\theta \tag{3.7ข}$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \sin\theta \tag{3.7ค}$$

โดยที่ตัวแปรต่าง ๆ ในระบบสมการอนุพันธ์ที่ได้จะต้องถูกเขียนให้อยู่ในรูปของตัวแปรหน่วยเพื่อให้ง่ายต่อการหาคำตอบเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีการยิงเป้า ดังนี้

$$\bar{x} = \frac{x}{L};\ \bar{y} = \frac{y}{L};\ \bar{x}_C = \frac{x_C}{L};\ \bar{y}_C = \frac{y_C}{L};\ \bar{x}_D = \frac{x_D}{L};\ \bar{y}_D = \frac{y_D}{L};\ \overline{x^*} = \frac{x^*}{L};\ \overline{y^*} = \frac{y^*}{L}$$

$$\bar{s} = \frac{s}{L};\ \bar{S}_t = \frac{S_t}{L};\ \bar{P} = \frac{PL^2}{EI};\ \bar{I} = \frac{I}{L^4};\ \bar{M} = \frac{ML}{EI};\ \bar{K} = \frac{KL}{EI}$$

โดยที่

x = ระยะตามแนวราบ

y = ระยะตามแนวดิ่ง

x^* = ระยะจากจุด A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวราบ

y^* = ระยะจากจุด A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวดิ่ง

x_C = ระยะจากจุด A ถึงจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงตามแนวราบ

y_C = ระยะจากจุด A ถึงจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงตามแนวดิ่ง

x_D = ระยะจากจุด A ถึงจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงตามแนวราบ

y_D = ระยะจากจุด A ถึงจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงตามแนวดิ่ง

P = แรงกระทำตามแนวดิ่ง

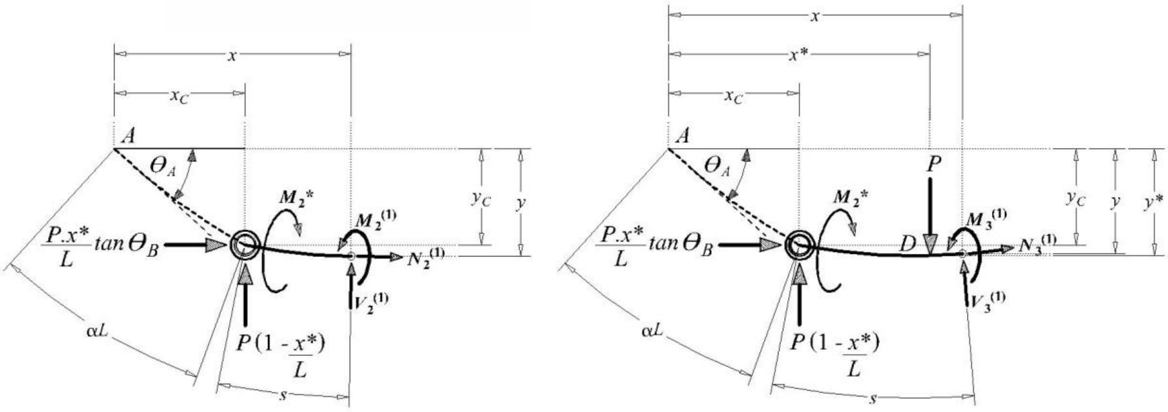
s = ความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคา

S_t = ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด

L = ความยาวช่วงของอิลาสติกคา

K = ค่าสติฟเนสของสปริง

EI = ความแข็งแกร่งต่อการดัดของอิลาสติกคา



(ก) (ข)

รูปที่ 3.4 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาในกรณีที่ 1 ระยะ $\alpha < \beta$
(ก) ในช่วงพิจารณาที่ $\alpha L \le s \le \beta L$ และ (ข) ในช่วงพิจารณาที่ $\beta L \le s \le S_t$

พิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาจากรูปที่ 3.4(ก) สามารถเขียนสมการสมดุลของโมเมนต์ดัดในช่วง CD หรือ $M_2^{(1)}$ ได้ดังนี้

$$M_2^{(1)} = \left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.(y-y_C)\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).(x-x_C)\right) + K\Delta\theta \quad (3.8)$$

โดยที่ $K\Delta\theta$ เป็นโมเมนต์ดัดจากจุดต้านทานการหมุนแบบสปริง จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับความโค้งของอิลาสติกคาและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตในสมการที่ (2.1) เมื่อนำสมการที่ (3.8) แทนค่าลงไปจะได้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_2^{(1)}}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.(y-y_C)\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).(x-x_C)\right) + K\Delta\theta\right] \quad (3.9)$$

ดังนั้น จะได้สมการที่ (3.9) (2.6ก) และ (2.6ข) เป็นสมการครอบคลุมปัญหา (Governing Equation) ซึ่งสามารถเขียนสมการที่ (3.9) ให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}}=\left[\bar{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.(\bar{y}-\bar{y}_C)+\bar{P}.(1-\overline{x^*}).(\bar{x}-\bar{x}_C)+\bar{K}\Delta\theta\right] \tag{3.10}$$

พิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาจากรูปที่ 3.4(ข) สามารถเขียนสมการสมดุลของโมเมนต์ดัดในช่วง DB หรือ $M_3^{(1)}$ ได้ดังนี้

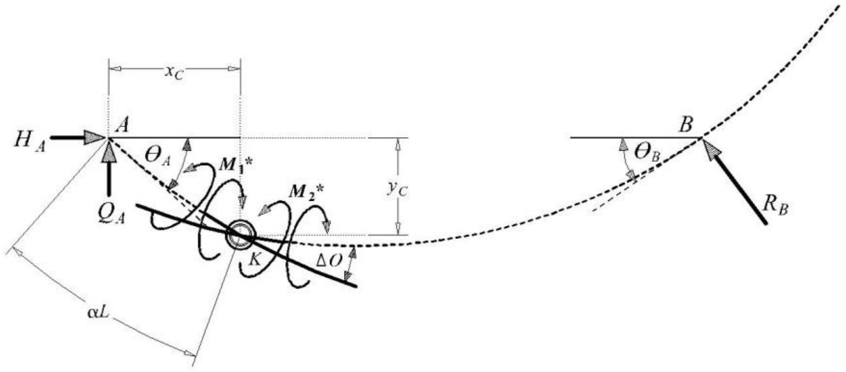
$$M_3^{(1)}=\left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.(y-y_C)\right)+\left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).(x-x_C)\right)-P(x-x^*)+K\Delta\theta \tag{3.11}$$

จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับความโค้งของอิลาสติกคาและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตในสมการที่ (2.1) เมื่อนำสมการที่ (3.11) แทนค่าลงไปจะได้

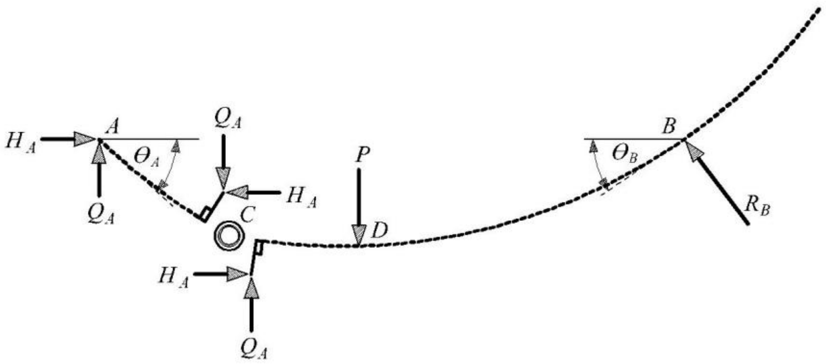
$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{M_3^{(1)}}{EI}=\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.(y-y_C)\right)+\left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).(x-x_C)\right)-P(x-x^*)+K\Delta\theta\right] \tag{3.12}$$

ดังนั้น จะได้สมการที่ (3.12) (2.6ก) และ (2.6ข) เป็นสมการครอบคลุมปัญหา (Governing Equation) ซึ่งสามารถเขียนสมการที่ (3.12) ให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}}=\left[\bar{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.(\bar{y}-\bar{y}_C)+\bar{P}.(1-\overline{x^*}).(\bar{x}-\bar{x}_C)-\bar{P}(\bar{x}-\overline{x^*})+\bar{K}\Delta\theta\right] \tag{3.13}$$



รูปที่ 3.5 พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาจากแรงเฉือน



รูปที่ 3.6 รูปร่างการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่มีจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงอยู่ภายใน

จากรูปที่ 3.6 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและผลต่างของมุมที่จุดหมุนแบบสปริงที่เป็นเชิงเส้นแสดงในสมการดังนี้

$$M_1^{*(i)} = \left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.y_C\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).x_C\right) = K\Delta\theta \tag{3.14}$$

ดังนั้น

$$M_2^{*(i)} = K\Delta\theta \tag{3.15}$$

โดยที่

$M_1^{*(i)}$ คือ โมเมนต์ดัดทางด้านซ้ายของสปริงหมุน

$M_2^{*(i)}$ คือ โมเมนต์ดัดทางด้านขวาของสปริงหมุน

K คือ ค่าสติฟเนสของสปริง ($K = 1$, 10, 100)

$\Delta\theta$ คือ ค่าความแตกต่างของมุม ณ ตำแหน่งสปริง (จุด C)

สมการที่ (3.7ก, 3.7ข, 3.7ค, 3.10 และ 3.13) เป็นระบบสมการอนุพันธ์ที่ใช้ในการอธิบายการแอ่นตัวมากชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคา ดังนั้นหากต้องการทราบพฤติกรรมทั้งหมดต้องทำการอินทิเกรตให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา (Boundary Condition) ดังนี้

$$\bar{x}\,(0) = 0 \quad ; \quad \bar{x}\,(\bar{S}_t) = 1 \tag{3.16 ก}$$

$$\bar{y}\,(0) = 0 \quad ; \quad \bar{y}\,(\bar{S}_t) = 0 \tag{3.16 ข}$$

$$\theta(\bar{S}_t = 0) = \theta_A \quad ; \quad \theta(\bar{S}_t = 1) = \theta_B \tag{3.16 ค}$$

$$\bar{x}_C = \bar{x}_{Cs} \tag{3.16 ง}$$

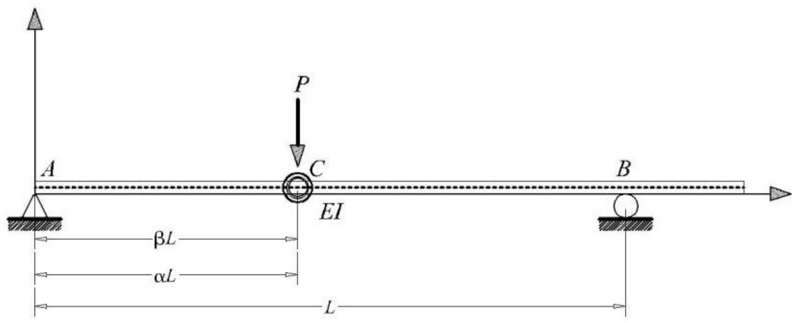
$$\bar{y}_C = \bar{y}_{Cs} \tag{3.16 จ}$$

$$\overline{x^*} = \overline{x^*}s \tag{3.16 ฉ}$$

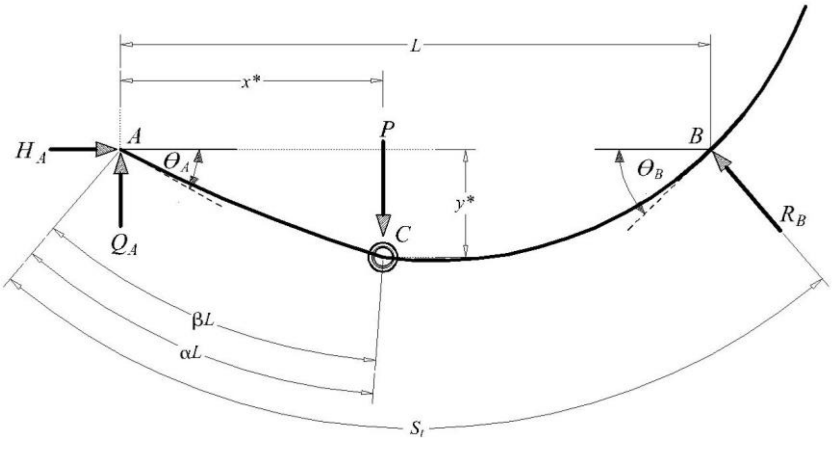
$$((\overline{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.\bar{y}_C) + (\overline{P}.(1-\overline{x^*}).\bar{x}_C)) = \bar{K}\Delta\theta \tag{3.16 ช}$$

3.2.2 ลักษณะแบบจำลองของอิลาสติกคาในกรณีที่ 2

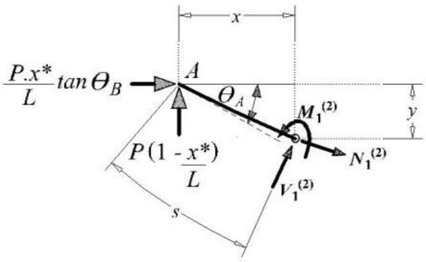
ในกรณีที่ 2 นี้เป็นกรณีที่ตำแหน่งแรงกระทำตรงกันกับตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงดังแสดงในรูป 3.7 และ 3.8 ซึ่งโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในอิลาสติกคาจะมีอยู่สองช่วงด้วยกันคือ $M_1^{(2)}$ และ $M_2^{(2)}$ ซึ่งสอดคล้องกับช่วง AC และ CB ตามลำดับ

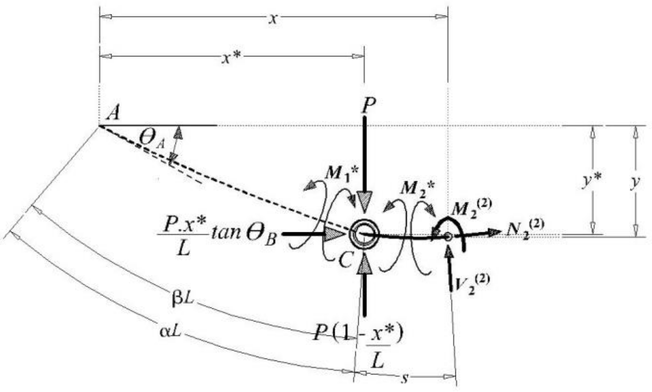


รูปที่ 3.7 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะก่อนการเสียรูป กรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$



รูปที่ 3.8 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะหลังการเสียรูป กรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$





(ก) (ข)

รูปที่ 3.9 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาในกรณีที่ 2 ระยะ $\alpha = \beta$

(ก) ในช่วงพิจารณาที่ $0 \le s \le (\alpha L, \beta L)$ และ (ข) ในช่วงพิจารณาที่ $\alpha L, \beta L \le s \le S_t$

พิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาจากรูปที่ 3.9(ก) สามารถเขียนสมการสมดุลของโมเมนต์ดัดในช่วง AC หรือ $M_1^{(2)}$ ได้ดังนี้

$$M_1^{(2)} = \left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.y\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).x\right) \tag{3.17}$$

จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับความโค้งของอิลาสติกคาและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตในสมการที่ (2.1) เมื่อนำสมการที่ (3.17) แทนค่าลงไปจะได้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_1^{(2)}}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.y\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).x\right)\right] \tag{3.18}$$

ดังนั้น จะได้สมการที่ (3.18) (2.6ก) และ (2.6ข) เป็นสมการครอบคลุมปัญหา (Governing Equation) ซึ่งสามารถเขียนสมการที่ (3.18) ให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \left[\overline{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.\bar{y} + \overline{P}.(1-\overline{x^*}).\bar{x}\right] \tag{3.19}$$

พิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาจากรูปที่ 3.9 (ข) สามารถเขียนสมการสมดุลของโมเมนต์ดัดในช่วง CB หรือ $M_2^{(2)}$ ได้ดังนี้

$$M_2^{(2)} = \left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.(y-y^*)\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).(x-x^*)\right) + K\Delta\theta \tag{3.20}$$

จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับความโค้งของอิลาสติกคาและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตในสมการที่ (2.1) เมื่อนำสมการที่ (3.20) แทนค่าลงไปจะได้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_2^{(2)}}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.(y-y^*)\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).(x-x^*)\right) + K\Delta\theta\right] \qquad (3.21)$$

ดังนั้น จะได้สมการที่ (3.21) (3.7ข) และ (3.7ค) เป็นสมการครอบคลุมปัญหา (Governing Equation) ซึ่งสามารถเขียนสมการที่ (3.21) ให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \left[\bar{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.(\bar{y}-\overline{y^*}) + \bar{P}.(1-\overline{x^*}).(\bar{x}-\overline{x^*}) - \bar{P}(\bar{x}-\overline{x^*}) + \bar{K}\Delta\theta\right] \qquad (3.22)$$

สมการที่ (3.7ข, 3.7ค, 3.19 และ 3.22) เป็นสมการอนุพันธ์ที่ใช้ในการอธิบายชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคา ดังนั้นหากต้องการพฤติกรรมทั้งหมดต้องทำการอินทิเกรทให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา (Boundary Condition) ดังนี้

$$\bar{x}\,(0) = 0 \quad ; \quad \bar{x}\,(\bar{S}_t) = 1 \qquad (3.23\ ก)$$

$$\bar{y}\,(0) = 0 \quad ; \quad \bar{y}\,(\bar{S}_t) = 0 \qquad (3.23\ ข)$$

$$\theta(\bar{S}_t = 0) = \theta_A \quad ; \quad \theta(\bar{S}_t = 1) = \theta_B \qquad (3.23\ ค)$$

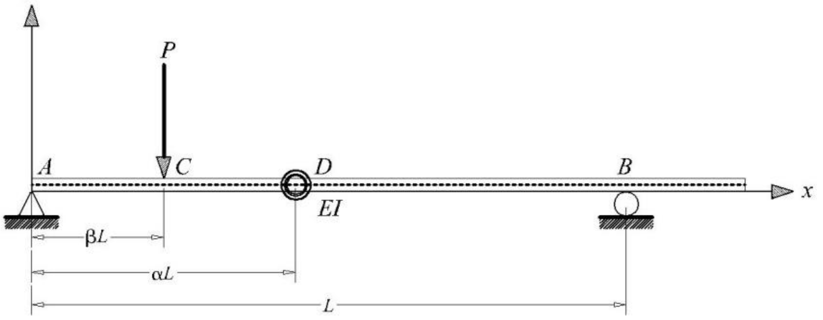
$$\overline{x^*} = \overline{x^*}_s \qquad (3.23\ ง)$$

$$\overline{y^*} = \overline{y^*}_s \qquad (3.23\ จ)$$

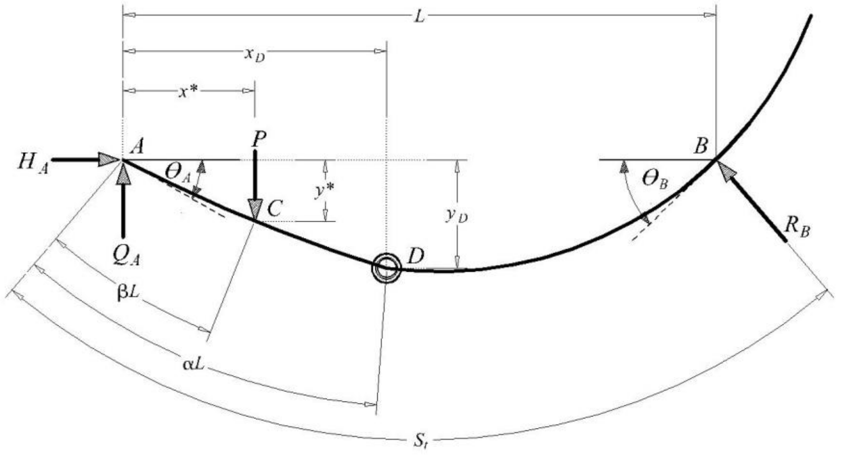
$$((\bar{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.\overline{y^*}) + (\bar{P}.(1-\overline{x^*}).\overline{x^*})) = \bar{K}\Delta\theta \qquad (3.23\ ฉ)$$

3.2.3 ลักษณะแบบจำลองของอิลาสติกคาในกรณีที่ 3

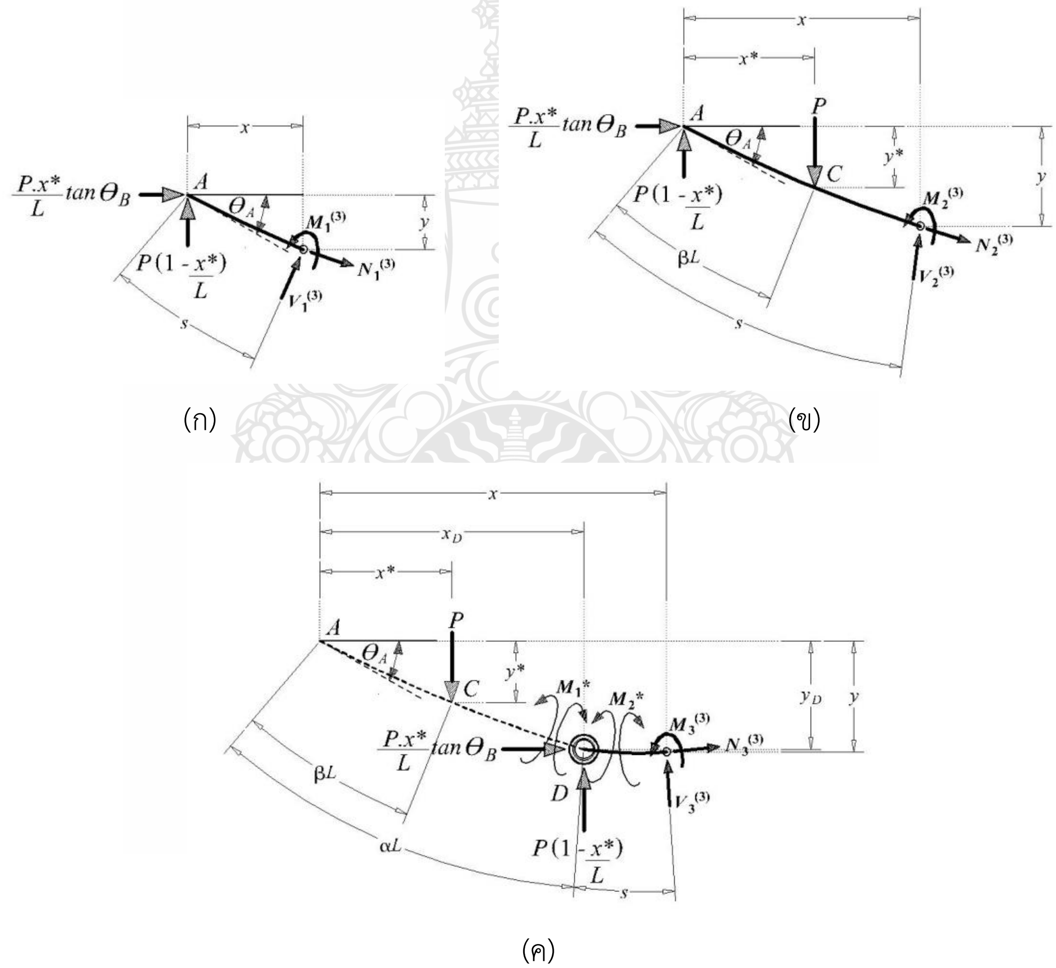
ในกรณีที่ 3 เป็นกรณีที่ตำแหน่งของแรงกระทำอยู่ทางด้านซ้ายมือของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงดังแสดงในรูป 3.10 และ 3.11 ทำให้มีโมเมนต์ดัด 3 ช่วง คือ $M_1^{(3)}, M_2^{(3)}, M_3^{(3)}$ ซึ่งสอดคล้องกับช่วง AC, CD และ DB ตามลำดับ



รูปที่ 3.10 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะก่อนการเสียรูป กรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$



รูปที่ 3.11 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะหลังการเสียรูป กรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$



รูปที่ 3.12 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาในกรณีที่ 3 ระยะ $\alpha > \beta$
(ก) ในช่วงพิจารณาที่ $0 \le s \le \beta L$, (ข) ในช่วงพิจารณาที่ $\beta L \le s \le \alpha L$ และ
(ค) ในช่วงพิจารณาที่ $\alpha L \le s \le S_t$

พิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาจากรูปที่ 3.12(ก) สามารถเขียนสมการสมดุลของโมเมนต์ดัดในช่วง AC หรือ $M_1^{(3)}$ ได้ดังนี้

$$M_1^{(3)} = \left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.y\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).x\right) \tag{3.24}$$

จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับความโค้งของอิลาสติกคาและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตในสมการที่ (2.1) เมื่อนำสมการที่ (3.24) แทนค่าลงไปจะได้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_1^{(3)}}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.y\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).x\right)\right] \tag{3.25}$$

ดังนั้น จะได้สมการที่ (3.25) (2.6ก) และ (2.6ข) เป็นสมการครอบคลุมปัญหา (Governing Equation) ซึ่งสามารถเขียนสมการที่ (3.25) ให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \left[\overline{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.\bar{y} + \overline{P}.(1-\overline{x^*}).\bar{x}\right] \tag{3.26}$$

พิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาจากรูปที่ 3.12(ข) สามารถเขียนสมการสมดุลของโมเมนต์ดัดในช่วง CD หรือ $M_2^{(3)}$ ได้ดังนี้

$$M_2^{(3)} = \left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.y\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).x\right) - P(x-x^*) \tag{3.27}$$

จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับความโค้งของอิลาสติกคาและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตในสมการที่ (2.1) เมื่อนำสมการที่ (3.27) แทนค่าลงไปจะได้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_2^{(3)}}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.y\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).x\right) + P(x-x^*)\right] \tag{3.28}$$

ดังนั้น จะได้สมการที่ (3.28) (2.6ก) และ (2.6ข) เป็นสมการครอบคลุมปัญหา (Governing Equation) ซึ่งสามารถเขียนสมการที่ (3.28) ให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \left[\overline{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.\bar{y} + \overline{P}.(1-\overline{x^*}).\bar{x}) - \overline{P}(\bar{x}-\overline{x^*})\right] \tag{3.29}$$

พิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาจากรูปที่ 3.12(ค) สามารถเขียนสมการสมดุลของโมเมนต์ดัดในช่วง DB หรือ $M_3^{(3)}$ ได้ดังนี้

$$M_3^{(3)} = \left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.(y-y_D)\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).(x-x_D)\right) - P(x-x_D) + K\Delta\theta \qquad (3.30)$$

จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับความโค้งของอิลาสติกคาและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตในสมการที่ (2.1) เมื่อนำสมการที่ (3.30) แทนค่าลงไปจะได้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_3^{(3)}}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.(y-y_D)\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).(x-x_D)\right) - P(x-x_D) + K\Delta\theta\right] \qquad (3.31)$$

ดังนั้น จะได้สมการที่ (3.31) (2.6ก) และ (2.6ข) เป็นสมการครอบคลุมปัญหา (Governing Equation) ซึ่งสามารถเขียนสมการที่ (3.31) ให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \left[\bar{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.(\bar{y}-\bar{y}_D) + \bar{P}.(1-\overline{x^*}).(\bar{x}-\bar{x}_D) - \bar{P}(\bar{x}-\bar{x}_D) + \bar{K}\Delta\theta\right] \qquad (3.32)$$

สมการที่ (3.7ข, 3.7ค, 3.26, 3.29 และ 3.32) เป็นสมการอนุพันธ์ที่ใช้อธิบายชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคา ดังนั้นหากต้องการพฤติกรรมทั้งหมดต้องทำการอินทิเกรทให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา (Boundary Condition) ดังนี้

$$\bar{x}(0) = 0 \quad ; \quad \bar{x}(\bar{S}_t) = 1 \qquad (3.33\ ก)$$

$$\bar{y}(0) = 0 \quad ; \quad \bar{y}(\bar{S}_t) = 0 \qquad (3.33\ ข)$$

$$\theta(\bar{S}_t = 0) = \theta_A \quad ; \quad \theta(\bar{S}_t = 1) = \theta_B \qquad (3.33\ ค)$$

$$\bar{x}_D = \bar{x}_{Ds} \qquad (3.33\ ง)$$

$$\bar{y}_D = \bar{y}_{Ds} \qquad (3.33\ จ)$$

$$\overline{x^*} = \overline{x^*}_s \qquad (3.33\ ฉ)$$

$$((\bar{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.\bar{y}_D) + (\bar{P}.(1-\overline{x^*}).\bar{x}_D)) - (\bar{P}.(\bar{x}_D - \overline{x^*})) = \bar{K}\Delta\theta \qquad (3.33\ ช)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

3.3 กระบวนการคำนวณปัญหา

สำหรับขั้นตอนและวิธีการคำนวณด้วยโปรแกรม MATLAB ของแบบจำลองปัญหาข้างต้นทั้ง 3 กรณี มีขั้นตอนการศึกษา ดังนี้

3.3.1 กรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$

3.3.1.1 กำหนดค่าของตัวแปรควบคุม (Controlled Variable) ซึ่งในการศึกษานี้จะใช้ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอิลาสติกคา $(\bar{S}_t)$ เป็นตัวแปรควบคุม พร้อมทั้งกำหนดค่าเงื่อนไขของจุดรองรับ ณ ตำแหน่ง $\bar{S}_t = 0$ และ $\bar{S}_t = 1$

3.3.1.2 กำหนดค่าตัวแปรของตำแหน่งสปริง $(\alpha = 0.25, 0.50, 0.75)$ กำหนดค่าตัวแปรของตำแหน่งของแรงที่กระทำ $(\beta = 0.35, 0.50, 0.75, 0.85)$ และกำหนดค่าสติฟเนสของสปริง $(\bar{K} = 1, 10, 100)$

3.3.1.3 ประมาณค่าเริ่มต้นของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า จากนั้นทำการอินทิเกรตสมการที่ (3.7ก - 3.7ค, 3.10 และ 3.13) โดยใช้ระเบียบวิธีรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta) และใช้กระบวนการกระทำซ้ำในการปรับแก้ตัวแปรไม่ทราบค่าในระบบสมการจนกว่าผลของคำตอบจะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดไว้ในสมการที่ (3.34) การศึกษาในครั้งนี้กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ (Tolerance) เท่ากับ 10^{-7}

$$Min\ \phi = \left|\theta(\bar{S}_t{=}1) - \theta_B\right| + \left|\bar{x}(\bar{S}_t{=}1) - 1\right| + \left|\bar{y}(\bar{S}_t{=}1)\right| + \left|\bar{x}_C - \bar{x}_{Cs}\right| +$$

$$\left|\bar{y}_C - \bar{y}_{Cs}\right| + \left|\overline{x^*} - \overline{x^*}_s\right| + \left|\left((\bar{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.\bar{y}_C) + (\bar{P}.(1-\overline{x^*}).\bar{x}_C)\right) - \bar{K}\Delta\theta\right| \quad (3.34)$$

3.3.2 กรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$

3.3.2.1 กำหนดค่าของตัวแปรควบคุม (Controlled Variable) ซึ่งในการศึกษานี้จะใช้ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอิลาสติกคา $(\bar{S}_t)$ เป็นตัวแปรควบคุม พร้อมทั้งกำหนดค่าเงื่อนไขของจุดรองรับ ณ ตำแหน่ง $\bar{S}_t = 0$ และ $\bar{S}_t = 1$

3.3.2.2 กำหนดค่าตัวแปรของตำแหน่งสปริง $(\alpha = 0.25, 0.50, 0.75)$ กำหนดค่าตัวแปรของตำแหน่งของแรงที่กระทำ $(\beta = 0.25, 0.50, 0.75)$ และกำหนดค่าสติฟเนสของสปริง $(\bar{K} = 1, 10, 100)$

3.3.2.3 ประมาณค่าเริ่มต้นของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า จากนั้นทำการอินทิเกรตสมการที่ (3.7ข, 3.7ค, 3.19 และ 3.22) โดยใช้ระเบียบวิธีรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta) และใช้กระบวนการกระทำซ้ำในการปรับแก้ตัวแปรไม่ทราบค่าในระบบสมการจนกว่าผลของคำตอบจะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดไว้ในสมการที่ (3.35) การศึกษาในครั้งนี้กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ (Tolerance) เท่ากับ 10^{-7}

$$Min\ \phi = \left|\theta(\bar{S}_t=1)-\theta_B\right| + \left|\bar{x}(\bar{S}_t=1)-1\right| + \left|\bar{y}(\bar{S}_t=1)\right| + \left|\overline{x^*}-\overline{x^*s}\right| +$$

$$\left|\overline{y^*}-\overline{y^*s}\right| + \left|\left((\bar{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.\overline{y^*})+(\bar{P}.(1-\overline{x^*}).\overline{x^*})\right)-\bar{K}\Delta\theta\right| \quad (3.35)$$

3.3.3 กรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$

3.3.3.1 กำหนดค่าของตัวแปรควบคุม (Controlled Variable) ซึ่งในการศึกษานี้จะใช้ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอิลาสติกคา $(\bar{S}_t)$ เป็นตัวแปรควบคุม พร้อมทั้งกำหนดค่าเงื่อนไขของจุดรองรับ ณ ตำแหน่ง $\bar{S}_t = 0$ และ $\bar{S}_t = 1$

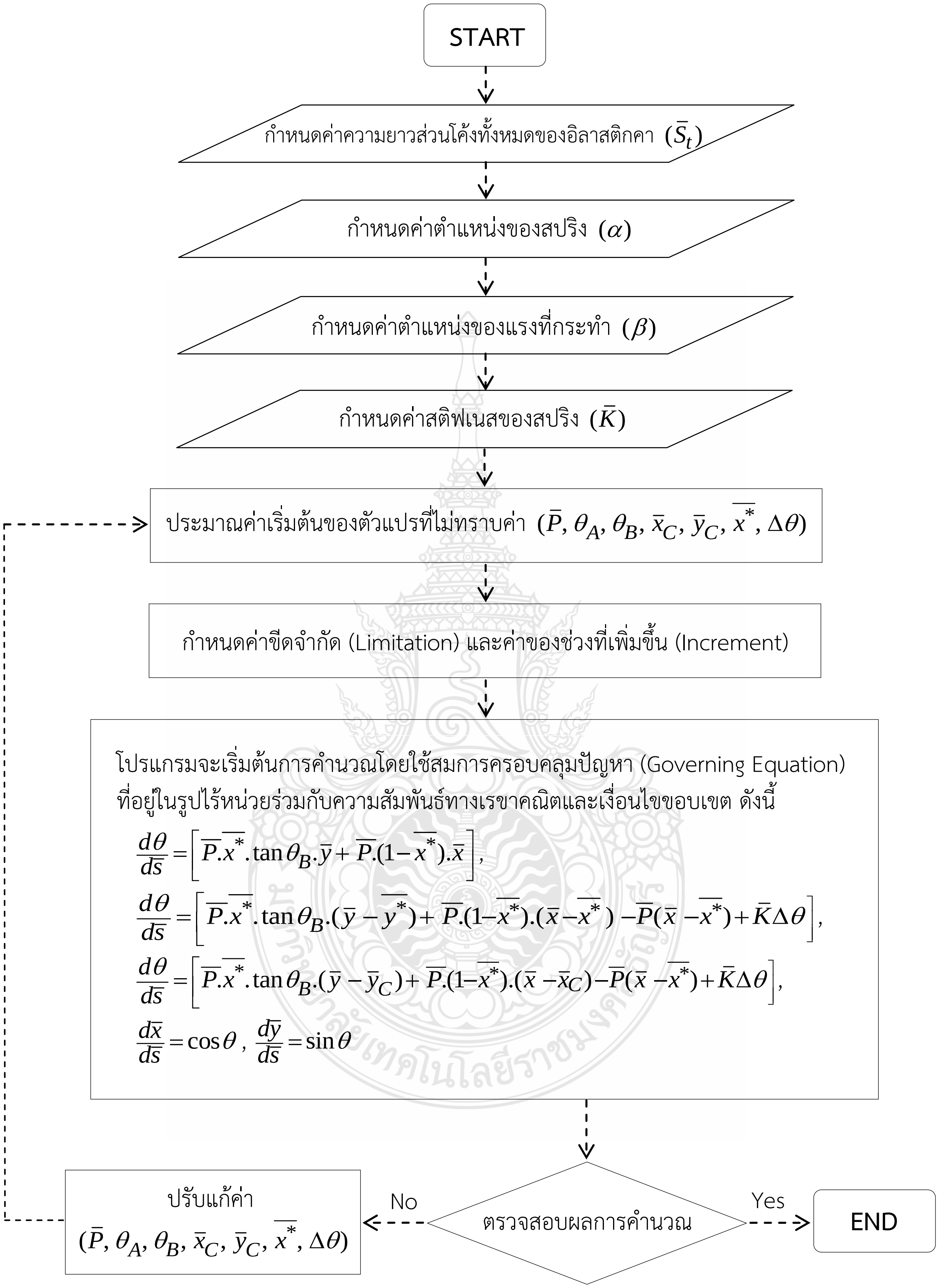
3.3.3.2 กำหนดค่าตัวแปรของตำแหน่งสปริง $(\alpha = 0.25, 0.50, 0.75)$ กำหนดค่าตัวแปรของตำแหน่งของแรงที่กระทำ $(\beta = 0.15, 0.25, 0.35, 0.50)$ และกำหนดค่าสติฟเนสของสปริง $(\bar{K} = 1, 10, 100)$

3.3.3.3 ประมาณค่าเริ่มต้นของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า จากนั้นทำการอินทิเกรตสมการที่ (3.7ข, 3.7ค, 3.26, 3.29 และ 3.32) โดยใช้ระเบียบวิธีรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta) และใช้กระบวนการกระทำซ้ำในการปรับแก้ตัวแปรไม่ทราบค่าในระบบสมการจนกว่าผลของคำตอบจะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดไว้ในสมการที่ (3.36) การศึกษาในครั้งนี้กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ (Tolerance) เท่ากับ 10^{-7}

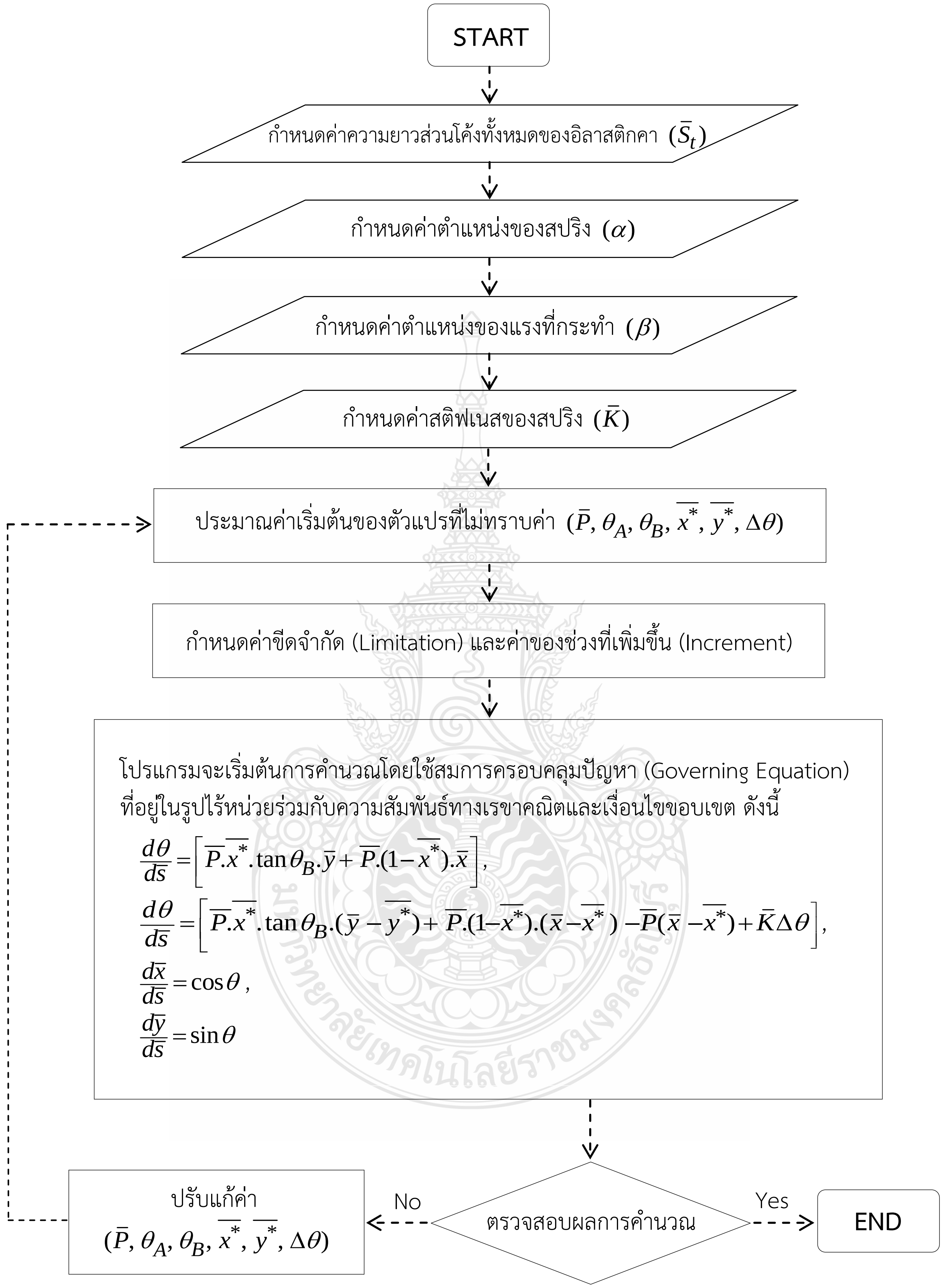
$$Min\ \phi = \left|\theta(\bar{S}_t=1)-\theta_B\right| + \left|\bar{x}(\bar{S}_t=1)-1\right| + \left|\bar{y}(\bar{S}_t=1)\right| + \left|\bar{x}_D-\bar{x}_{Ds}\right| + \left|\bar{y}_D-\bar{y}_{Ds}\right| +$$

$$\left|\overline{x^*}-\overline{x^*s}\right| + \left|\left((\bar{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.\bar{y}_D)+(\bar{P}.(1-\overline{x^*}).\bar{x}_D)-(\bar{P}.(\bar{x}_D-\overline{x^*}))\right)-\bar{K}\Delta\theta\right| \quad (3.36)$$

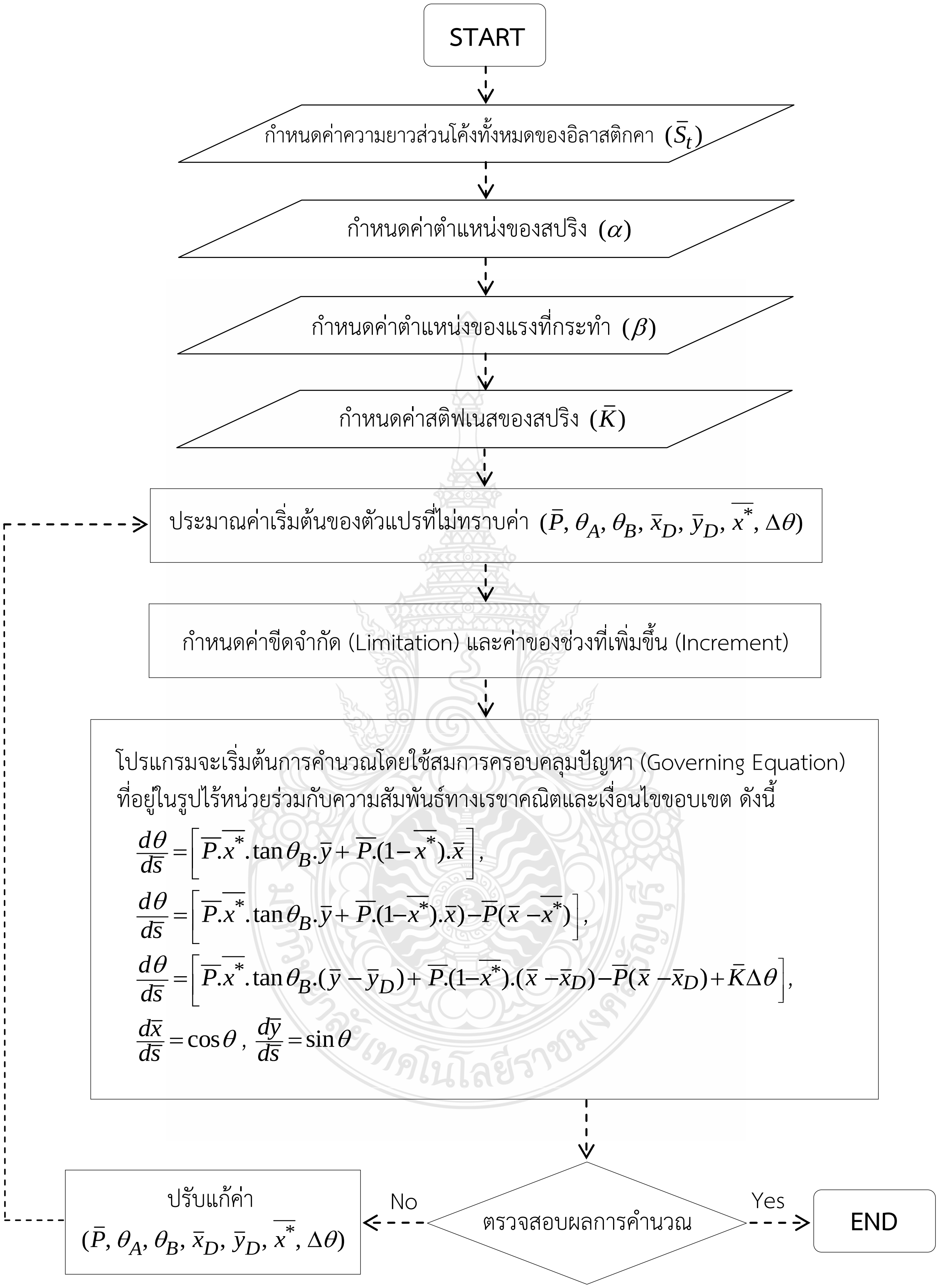
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี



รูปที่ 3.13 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม MATLAB ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$



รูปที่ 3.14 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม MATLAB ในกรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$



รูปที่ 3.15 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม MATLAB ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$

3.4 การทดสอบอิลาสติกคาตัวอย่าง

เพื่อเป็นการตรวจสอบผลจากการคำนวณทางทฤษฎีการทดสอบในห้องปฏิบัติการอย่างง่ายได้ถูกจัดเตรียมขึ้นโดยมีอุปกรณ์และขั้นตอนในการทดสอบดังนี้

3.4.1 เครื่องมือและอุปกรณ์

3.4.1.1 โต๊ะทดลอง

3.4.1.2 แผ่นโพลีคาร์บอเนต ขนาด 2 x 50 มม. ความยาว 1,600 มม.

3.4.1.3 ชุดสปริงต้านทานการหมุน

3.4.1.4 ชุดอุปกรณ์จับยึดแผ่นโพลีคาร์บอเนตสำหรับจุดรองรับแบบข้อหมุน

3.4.1.5 ชุดอุปกรณ์ล้อเลื่อนสำหรับจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน

3.4.1.6 ตลับเมตร

3.4.1.7 สายวัดความยาวชนิดผ้า

3.4.1.8 สายเอ็น

3.4.1.9 กล้องถ่ายรูป

3.4.2 ขั้นตอนการทดสอบ (ยกตัวอย่างเฉพาะกรณีที่ 1 ระยะ $\alpha < \beta$)

3.4.2.1 ทดสอบหาค่าคงที่ (ค่าสติฟเนส) ของสปริงหมุน

3.4.2.2 จากรูปที่ 3.20 จับยึดแผ่นโพลีคาร์บอเนตที่ใช้เป็นวัสดุจำลองอิลาสติกคาด้านจุดรองรับแบบข้อหมุน (จุด A) และที่บริเวณตำแหน่งของระยะ $\alpha = 0.25, 0.50, 0.75$ (จุด C) ก็จะทำการยึดติดชุดบานพับแบบสปริงกับแผ่นโพลีคาร์โบเนตเพื่อทำหน้าที่ส่งถ่ายโมเมนต์ (สปริงต้านทานการหมุน) และในด้านจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน (จุด B) นั้นจะทำการติดตั้งชุดล้อเลื่อนเพื่อให้แผ่นโพลีคาร์โบเนตเคลื่อนผ่านจุดรองรับด้านนี้ได้โดยไร้แรงเสียดทานเมื่อทำการออกแรงดึง และที่บริเวณตำแหน่งของแรงกระทำ (จุด D) ทำการเจาะรูเพื่อยึดสายเอ็นสำหรับใช้ในการวัดค่าของแรงดึงในแต่ละกรณี

3.4.2.3 ในกรณีที่ 1 ระยะ $\alpha < \beta$ แบ่งการทดสอบได้ ดังนี้

3.4.2.3.1 กำหนดให้ระยะตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha = 0.25$ และแปรผันค่าของแรงกระทำ $\beta = 0.35, 0.50, 0.75, 0.85$

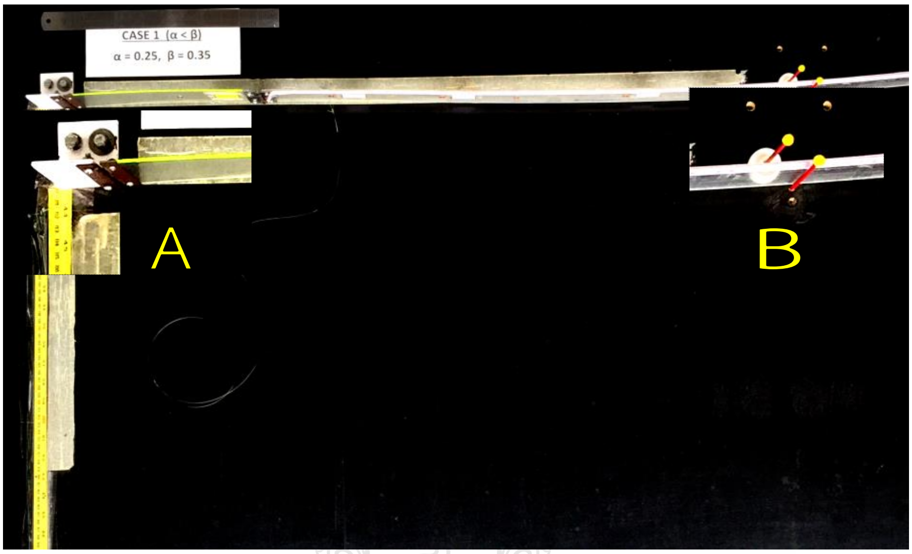
3.4.2.3.2 กำหนดให้ระยะตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha = 0.50$ และแปรผันค่าของแรงกระทำ $\beta = 0.75, 0.85$

3.4.2.3.3 กำหนดให้ระยะตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha = 0.75$ และแปรผันค่าของแรงกระทำ $\beta = 0.85$

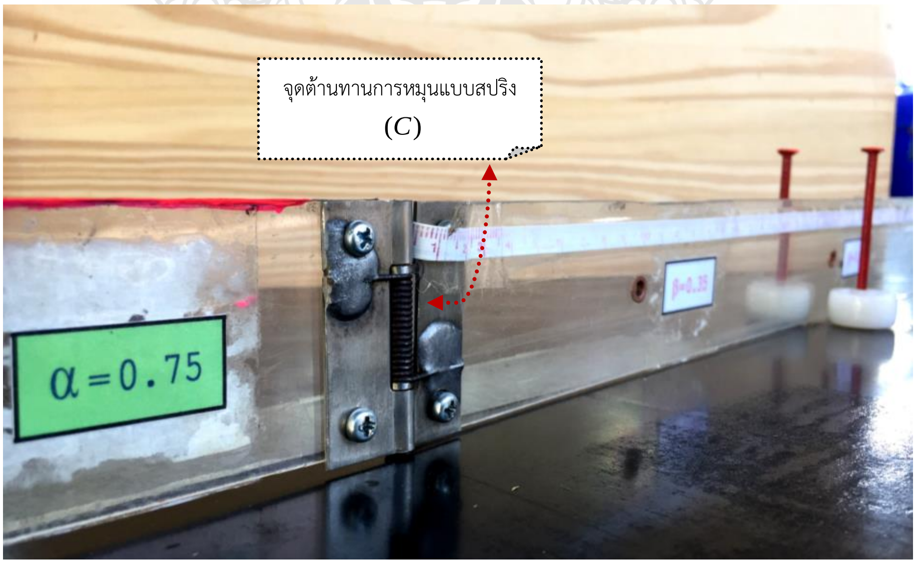
3.4.2.3.4 ดำเนินการทดสอบในแต่ละขั้นตอนตามข้อ 2.1, 2.2 และ 2.3 โดยทำการบันทึกค่าแรงดึง ค่าการโก่งตัวตามแนวแกน และทำการถ่ายรูปโดยที่แกนของกล้องต้องตั้งฉากกับระนาบของอิลาสติกคาตัวอย่างที่ทำการทดสอบเสมอ

3.4.2.3.5 ทำการวัดค่ามุมของจุดรองรับด้าน A และจุดรองรับด้าน B จากรูปถ่ายที่ได้จากขั้นตอนการทดสอบอิลาสติกคาตัวอย่างโดยใช้โปรแกรม AutoCAD

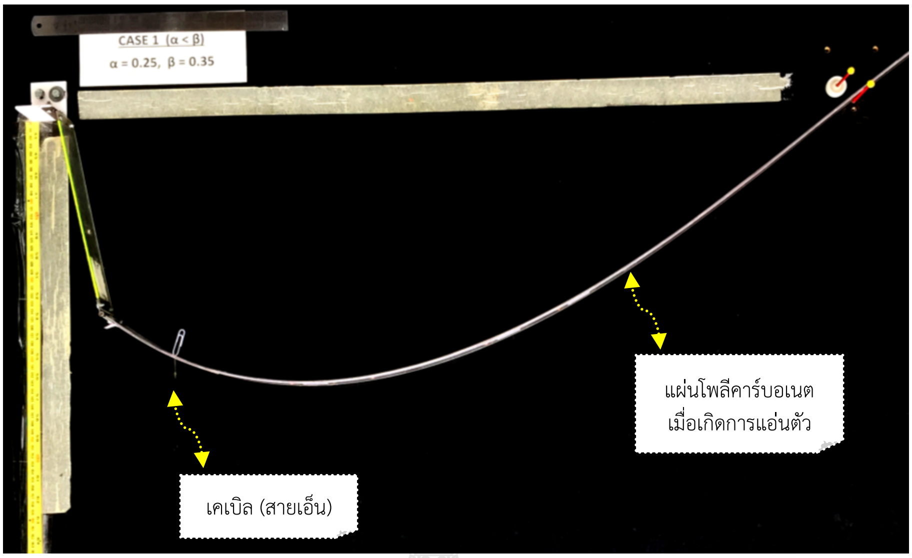
3.4.2.3.6 นำค่าของตัวแปรต่าง ๆ ที่ได้จากการทดสอบอิลาสติกคาตัวอย่างไปสรุปผล และเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม MATLAB



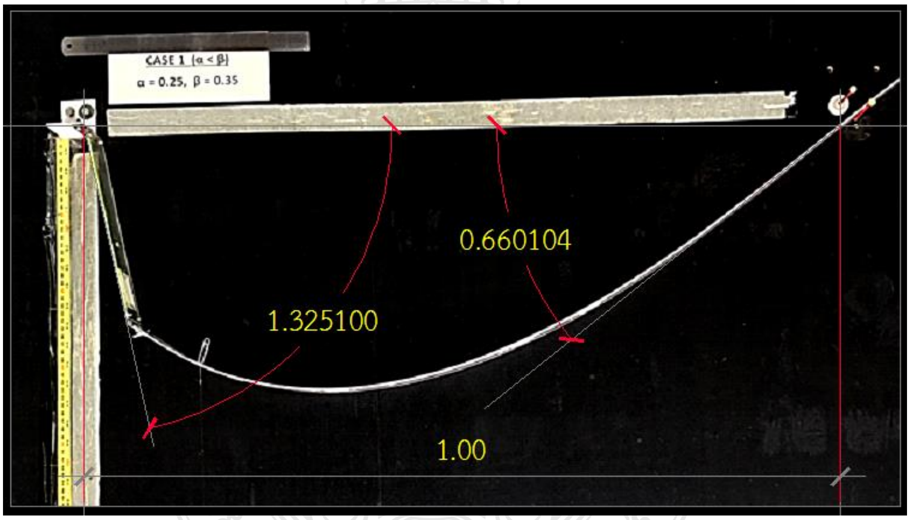
รูปที่ 3.16 การจับยึดแผ่นโพลีคาร์บอเนตทั้งสองด้านของการทดสอบ (โดยที่จุด A จำลองเป็นจุดรองรับแบบข้อหมุน และที่จุด B จำลองเป็นจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน)



รูปที่ 3.17 แบบจำลองจุด C (สปริงต้านทานการหมุนที่ใช้ในการทดลอง)



รูปที่ 3.18 ลักษณะการแอ่นตัวของอิลาสติกคาตัวอย่างที่จำลองจากวัสดุแผ่นโพลีคาร์บอเนต



รูปที่ 3.19 การวัดค่าการโก่งตัวของอิลาสติกคาตัวอย่างที่จำลองจากวัสดุแผ่นโพลีคาร์บอเนต ด้วยโปรแกรม AutoCAD

บทที่ 4
ผลการศึกษาและการวิเคราะห์

การศึกษางานวิจัยนี้ เพื่อศึกษาผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุดกระทำ ณ ตำแหน่งใด ๆ และมีจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงของอิลาสติกคา ณ ตำแหน่งใด ๆ โดยที่ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาถูกรองรับด้วยจุดรองรับที่หมุนได้อย่างอิสระ ส่วนที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางพาดอยู่บนจุดรองรับที่เลื่อนได้โดยไร้แรงเสียดทาน ซึ่งหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้ระเบียบวิธียิงเป้าและการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบรุงเง - คุตตา ในการหาผลเฉลยได้กำหนดรูปแบบตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงไว้ 3 กรณี คือ กรณีที่ระยะ $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ และ $\alpha > \beta$ และเพื่อให้เกิดความต้านทานที่หลากหลายในแต่ละกรณีได้กำหนดค่าสติฟเนส $\bar{K} = 1,\ 10$ และ 100 พร้อมทั้งนำผลที่ได้จากการคำนวณไปเปรียบเทียบกับผลการทดสอบตัวอย่างกรณีวัสดุเป็นแบบเชิงเส้น มีรายละเอียดดังนี้

4.1 ผลการศึกษาในกรณีที่ 1 ($\alpha < \beta$)

4.1.1 ตรวจสอบและเปรียบเทียบความถูกต้องของผลการคำนวณ

เพื่อให้เกิดความมั่นใจในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และโปรแกรมที่ถูกพัฒนาขึ้นมานั้น จำเป็นต้องมีการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบที่ได้ โดยนำไปเปรียบเทียบกับผลการคำนวณพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่มีความต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) จากตารางที่ 4.1 ในกรณีที่ตำแหน่งของสปริงมีค่าคงที่ $\alpha = 0.25$ และตำแหน่งของแรงกระทำมีค่า $\beta = 0.35$ ตารางที่ 4.2 ในกรณีที่ตำแหน่งของสปริงมีค่าคงที่ $\alpha = 0.50$ และตำแหน่งของแรงกระทำมีค่า $\beta = 0.60$ และตารางที่ 4.2 ในกรณีที่ตำแหน่งของสปริงมีค่าคงที่ $\alpha = 0.75$ และตำแหน่งของแรงกระทำมีค่า $\beta = 0.85$ เมื่อทำการเปรียบเทียบผลของอิลาสติกคาที่มีค่าสติฟเนสของสปริง $\bar{K} = 100$ กับอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) พบว่าคำตอบที่ได้นั้นมีค่าที่ใกล้เคียงกัน

ตารางที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$ ค่า $\beta = 0.35$ ค่า $\bar{K} = 1, 10$ และ 100 และ Single VAL Elastica

$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.10	5.826152	0.369639	0.177328	-0.176128	0.277150	-0.807885	0.636614
	1.20	13.253158	0.513564	0.106857	-0.225908	0.204185	-1.159298	0.782203
	1.30	31.686964	0.635870	0.055329	-0.243736	0.141621	-1.371746	0.697561
	1.40	77.076877	0.714331	0.027653	-0.248448	0.089773	-1.472136	0.449445
	1.50	217.565822	0.747617	0.010719	-0.249769	0.040933	-1.530595	0.174437
	1.60	580.135418	0.757516	0.004154	-0.249523	0.016716	-1.554692	0.043726
10	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.10	12.067276	0.485076	0.196379	-0.154204	0.290827	-0.721078	0.139533
	1.20	22.985228	0.622573	0.142564	-0.204825	0.228093	-1.027980	0.175863
	1.30	41.055904	0.690739	0.090613	-0.232568	0.162947	-1.260026	0.182796
	1.40	79.878994	0.727243	0.045707	-0.245572	0.099176	-1.428659	0.155758
	1.50	213.421123	0.748664	0.014348	-0.249561	0.042403	-1.526409	0.083406
	1.55	509.600947	0.756163	0.005175	-0.249945	0.018872	-1.552549	0.032007
100	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.10	13.448045	0.504234	0.201623	-0.147125	0.293849	-0.693397	0.015939
	1.20	25.249086	0.639377	0.151478	-0.198121	0.233032	-0.994032	0.020666
	1.30	43.705193	0.701371	0.100796	-0.228124	0.168280	-1.228651	0.022469
	1.40	81.163435	0.731876	0.053763	-0.243768	0.103099	-1.409504	0.020813
	1.50	210.380504	0.749439	0.017184	-0.249339	0.043545	-1.523044	0.013323
	1.54	405.378462	0.754932	0.007614	-0.249873	0.023499	-1.547621	0.007745
Single VAL Elastica	1.00	0.000000	0.000000	-	-	0.000000	0.000000	-
	1.10	13.620169	0.506467	-	-	0.294221	-0.689690	-
	1.20	25.540472	0.641355	-	-	0.233651	-0.989519	-
	1.30	44.062195	0.702681	-	-	0.168984	-1.224354	-
	1.40	81.357209	0.732528	-	-	0.103683	-1.406590	-
	1.50	209.816435	0.749583	-	-	0.043763	-1.522390	-
	1.54	404.491904	0.754967	-	-	0.023566	-1.547496	-

ตารางที่ 4.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50$ ค่า $\beta = 0.65$ ค่า $\bar{K} = 1, 10$ และ 100 และ Single VAL Elastica

$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.10	4.172768	0.476619	0.445965	-0.225115	0.542893	-0.513823	0.587327
	1.20	8.613752	0.624170	0.384118	-0.319077	0.481349	-0.748364	0.763229
	1.30	18.203721	0.714754	0.317168	-0.385776	0.416273	-0.933273	0.833302
	1.40	44.678391	0.766689	0.251587	-0.431772	0.350932	-1.075036	0.774750
	1.50	89.724209	0.780742	0.189874	-0.462447	0.282181	-1.197034	0.629074
10	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.06	7.868035	0.463407	0.470729	-0.163149	0.570523	-0.426855	0.122470
	1.12	14.375196	0.620604	0.440227	-0.231511	0.540061	-0.593641	0.162588
	1.18	24.492946	0.710273	0.408288	-0.283984	0.507903	-0.714166	0.188286
	1.24	40.186181	0.755107	0.374470	-0.327920	0.473216	-0.811837	0.205813
	1.30	60.497651	0.773354	0.338610	-0.365541	0.435558	-0.899847	0.215985
	1.36	82.371171	0.780080	0.300978	-0.397640	0.395055	-0.984962	0.219496
100	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.06	9.423444	0.482553	0.471648	-0.158378	0.571533	-0.432752	0.014575
	1.12	17.572478	0.642283	0.442537	-0.225098	0.542144	-0.596106	0.019562
	1.18	30.549887	0.726772	0.411992	-0.277035	0.510749	-0.712070	0.023145
	1.24	49.902414	0.763891	0.379265	-0.321171	0.476334	-0.806827	0.025982
	1.30	73.310353	0.777292	0.344242	-0.359282	0.438668	-0.893912	0.027978
	1.32	81.352791	0.779381	0.332109	-0.370765	0.425438	-0.922381	0.028447
Single VAL Elastica	1.00	0.000000	0.000000	-	-	0.000000	0.000000	-
	1.06	9.631626	0.484922	-	-	0.571656	-0.433401	-
	1.12	18.011024	0.644884	-	-	0.542397	-0.596307	-
	1.18	31.393957	0.728637	-	-	0.511090	-0.711746	-
	1.24	51.256143	0.764829	-	-	0.476709	-0.806200	-
	1.30	75.108448	0.777706	-	-	0.439050	-0.893183	-
	1.32	83.268479	0.779698	-	-	0.425820	-0.921641	-

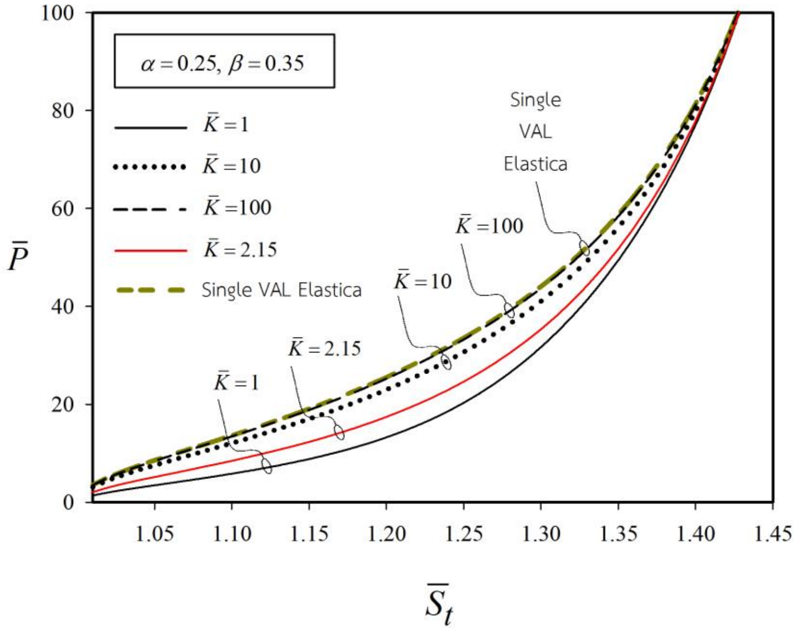
ตารางที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75$ ค่า $\beta = 0.85$ ค่า $\bar{K} = 1, 10$ และ 100 และ Single VAL Elastica

$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.01	2.261254	0.254772	0.747279	-0.060963	0.844875	-0.109408	0.231796
	1.02	3.512668	0.355495	0.744493	-0.087053	0.839967	-0.153934	0.323151
	1.03	4.821002	0.430267	0.741646	-0.107622	0.835265	-0.187299	0.390111
	1.04	6.416127	0.492056	0.738744	-0.125404	0.830779	-0.214364	0.443775
	1.05	8.642125	0.546722	0.735803	-0.141433	0.826556	-0.236583	0.488048
	1.06	12.431781	0.599300	0.732865	-0.156195	0.822759	-0.253642	0.523460
10	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.01	6.111291	0.265584	0.746310	-0.055932	0.844835	-0.146472	0.062915
	1.02	9.807289	0.378330	0.742902	-0.080711	0.840196	-0.199749	0.089996
	1.03	14.235902	0.468885	0.739839	-0.100795	0.836177	-0.233300	0.111764
	1.04	21.084775	0.552341	0.737265	-0.118568	0.833008	-0.251461	0.131239
	1.05	36.640877	0.641093	0.735546	-0.134559	0.831367	-0.249219	0.148603
100	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.01	7.248829	0.265063	0.745870	-0.053460	0.844682	-0.155723	0.007509
	1.02	11.795953	0.381311	0.742182	-0.077560	0.840036	-0.210941	0.010923
	1.03	17.584805	0.478287	0.739074	-0.097398	0.836245	-0.243292	0.013857
	1.04	27.653968	0.572626	0.736856	-0.115187	0.833740	-0.255230	0.016757
	1.05	56.598453	0.678293	0.736203	-0.130725	0.833598	-0.237049	0.019635
Single VAL Elastica	1.00	0.000000	0.000000	-	-	0.000000	0.000000	-
	1.01	7.397321	0.264841	-	-	0.844656	-0.156881	-
	1.02	12.060924	0.381531	-	-	0.840005	-0.212351	-
	1.03	18.050496	0.479424	-	-	0.836243	-0.244519	-
	1.04	28.658412	0.575449	-	-	0.833841	-0.255469	-
	1.05	60.096853	0.683268	-	-	0.833911	-0.235028	-

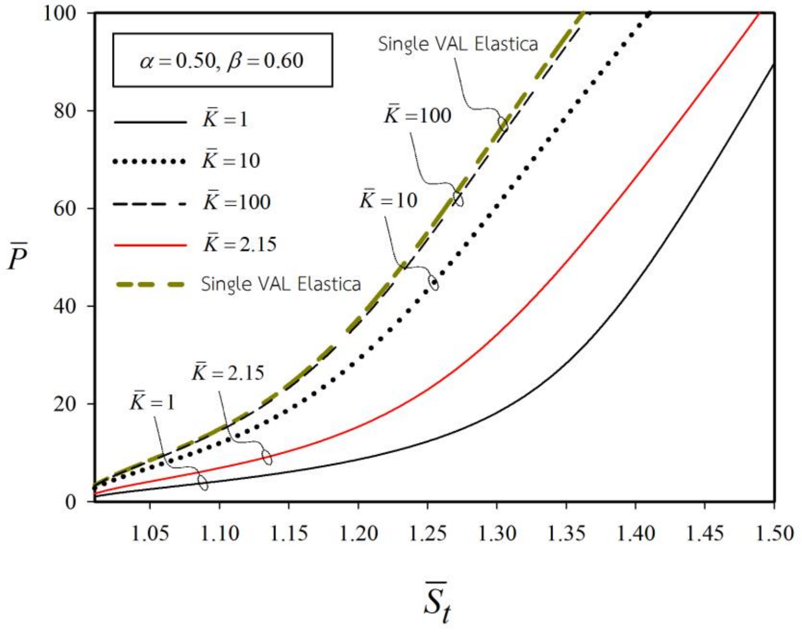
4.1.2 พฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคา

เมื่อนำผลที่ได้มาเขียนเส้นโค้งการเบี่ยงเบนของแรง (Load - Deflection Curves) ดังแสดงในกราฟรูปที่ 4.1, 4.2 และ 4.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $(\bar{P})$ กับความยาวส่วนโค้ง $(\bar{S}_t)$ เมื่อแปรผันค่า $\bar{K}$ ตั้งแต่ 1 - 100 (ระบบจะไร้เสถียรภาพเมื่อกำหนดให้ $\bar{K}=0$) และแปรผันค่า $\alpha=0.25,\ \beta=0.35,\ \alpha=0.50,\ \beta=0.60$ และ $\alpha=0.75,\ \beta=0.85$ เริ่มแรกเมื่อทำการเพิ่มแรง $\bar{P}$ ให้กับอิลาสติกคา ค่าของแรง $\bar{P}$ จะเพิ่มขึ้นในขณะที่ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{S}_t$ ก็เพิ่มขึ้นเช่นกัน ซึ่งเป็นการเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องโดยไม่พบจุดวิกฤต ดังกรณีที่ $\alpha=0.25,\quad \beta=0.35,\ \alpha=0.50,\ \beta=0.60$ (รูปที่ 4.1 และ 4.2) จะเห็นได้ว่าอิลาสติกคามีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้นเมื่อแรงกระทำ $\bar{P}$ มีค่าเพิ่มขึ้นลักษณะเช่นนี้ความชันของกราฟความสัมพันธ์มีค่าเป็นบวกเป็นการบ่งบอกถึงระบบที่มีเสถียรภาพ (สมดุลแบบมีเสถียรภาพ) และเมื่อทำการเพิ่มแรงอย่างต่อเนื่องอิลาสติกคาจะเกิดการดึงรั้งทำให้ความชันของกราฟมีค่าที่สูงมาก โดยที่การเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{S}_t$ ที่เพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของแรงกระทำ $\bar{P}$ ที่มีค่ามากจนกระทั่งไม่สามารถคำนวณผลได้อีกต่อไป และพฤติกรรมในลักษณะดังกล่าวจะพบได้ในกรณีที่ $\alpha=0.75,\ \beta=0.85$ ในขณะที่ผลกระทบของสติฟเนสของสปริง จะพบว่าค่าสติฟเนสของสปริงที่มีค่าน้อยส่งผลให้ระบบมีสติฟเนสต่ำในช่วงแรกแต่เมื่อระบบเกิดการยึดรั้งสติฟเนสของอิลาสติกคาจะมีค่าที่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว และเมื่อสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุนมีค่าที่เพิ่มขึ้น พฤติกรรมของอิลาสติกคาจะสอดคล้องกับพฤติกรรมของอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน โดยภาพรวมทั้งหมดของพฤติกรรมการแอ่นตัวของอิลาสติกคาที่เกิดขึ้นในแต่ละกรณีได้แสดงไว้ในกราฟรูปที่ 4.4 ซึ่งจะเห็นได้ว่าตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกที่อยู่ใกล้จุดรองรับด้านใดด้านหนึ่งมีโอกาสเกิดการดึงรั้งของอิลาสติกคาสูงทำให้ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับกรณีที่น้ำหนักบรรทุกกระทำอยู่บริเวณกึ่งกลางอิลาสติกคา

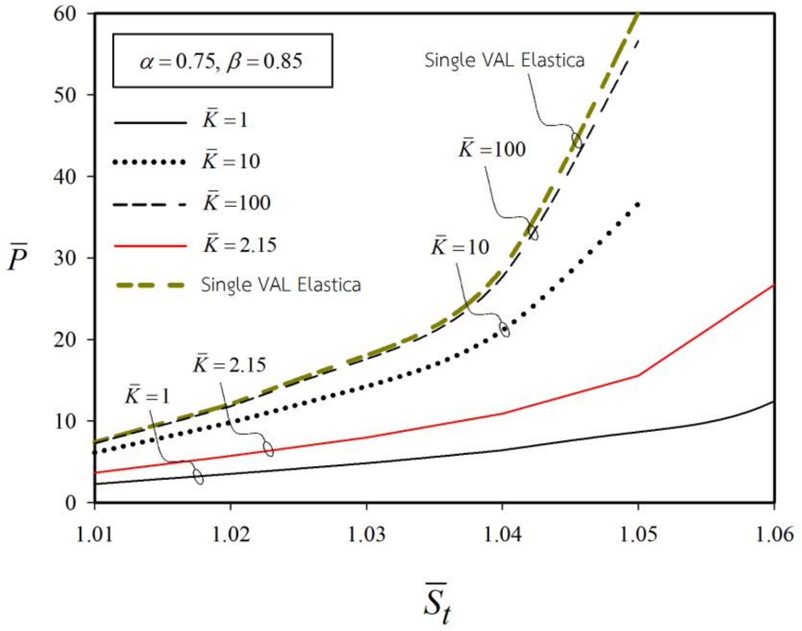
จากกราฟในรูปที่ 4.5, 4.6 และ 4.7 แสดงรูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคา เมื่อกำหนดแรง $\bar{P}=35.00$ แปรผันค่า $\alpha=0.25,\ \beta=0.35,\ \bar{P}=80.00$ แปรผันค่า $\alpha=0.50,\ \beta=0.60$ และ $\bar{P}=25.00$ แปรผันค่า $\alpha=0.75,\ \beta=0.85$ โดยในทุก ๆ กรณีจะแปรผันค่า $\bar{K}$ ตั้งแต่ 1, 10, 100, 2.15 และอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) แสดงให้เห็นว่าเมื่อค่าสติฟเนสของสปริงมีค่าน้อย พฤติกรรมการแอ่นตัวของอิลาสติกคาจะแสดงให้เห็นถึงจุดต้านทานการหมุนที่ส่งถ่ายค่าโมเมนต์ดัดได้อย่างไม่สมบูรณ์เกิดเป็นจุดหักมุมที่ชัดเจน และเมื่อแปรผันค่าสติฟเนสของสปริงให้มีค่าที่มากขึ้นอิลาสติกคาจะมีพฤติกรรมการแอ่นตัวที่มีค่าใกล้เคียง และสอดคล้องกับอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) เมื่อมีแรงกระทำที่เท่ากัน โดยที่ตำแหน่งของแรงกระทำ (กากบาทสีแดง) และตำแหน่งของสปริง (วงกลมสีแดง) จะยึดติดอยู่กับตำแหน่งเดิมเสมอ และเมื่อความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้นจนกระทั่งเกิดการดึงรั้งจะทำให้ไม่สามารถเพิ่มความยาวส่วนโค้งต่อไปได้อีก



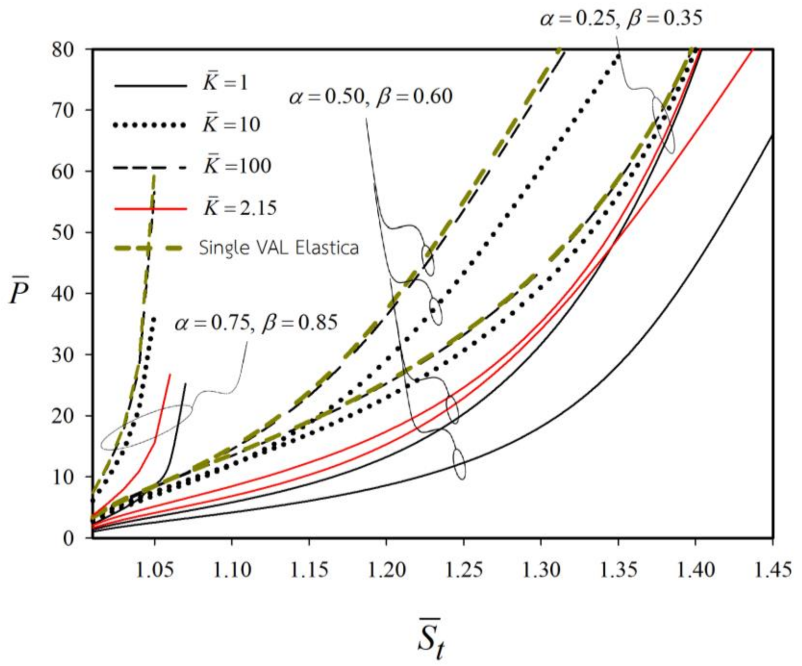
รูปที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.35$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica



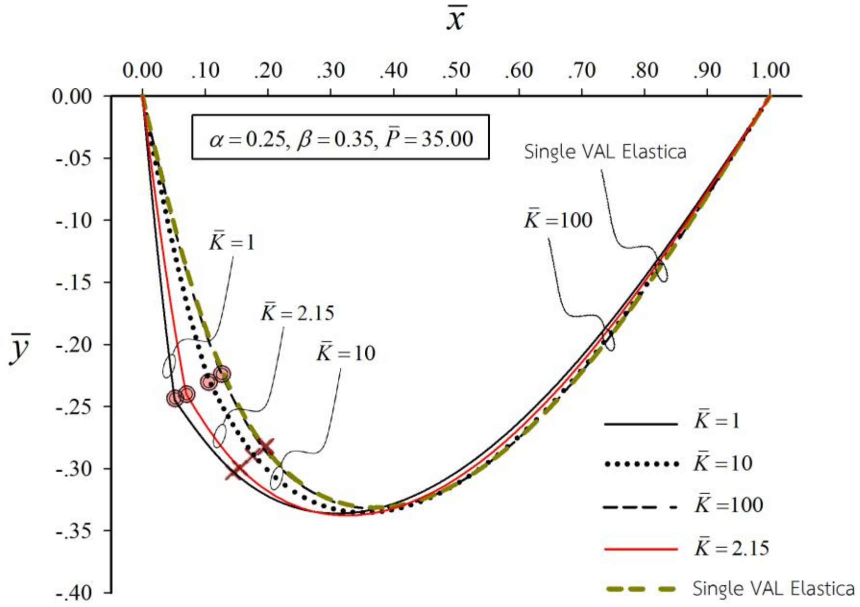
รูปที่ 4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.60$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica

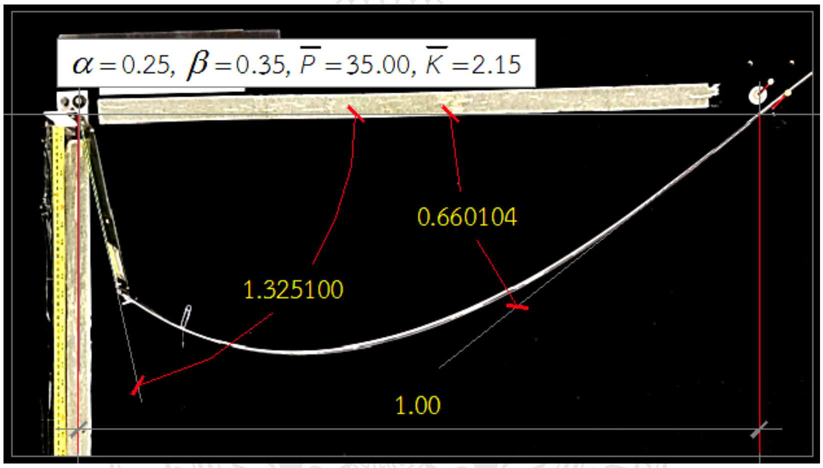


รูปที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.85$ และ $\bar{K} = 1,\ 10,\ 100,\ 2.15,$ Single VAL Elastica



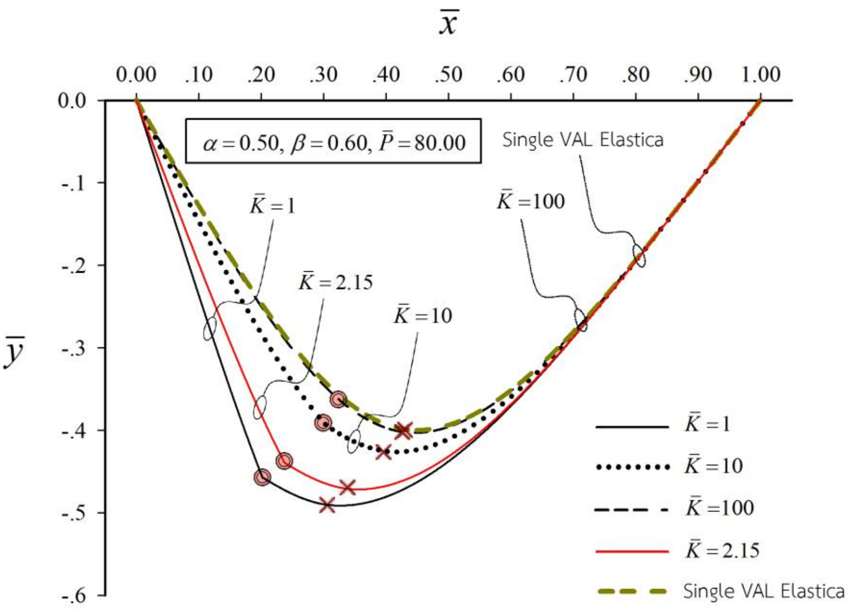
รูปที่ 4.4 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.35,\ \alpha = 0.50,\ \beta = 0.60,\ \alpha = 0.75,\ \beta = 0.85$ และ $\bar{K} = 1,\ 10,\ 100,\ 2.15,$ Single VAL Elastica

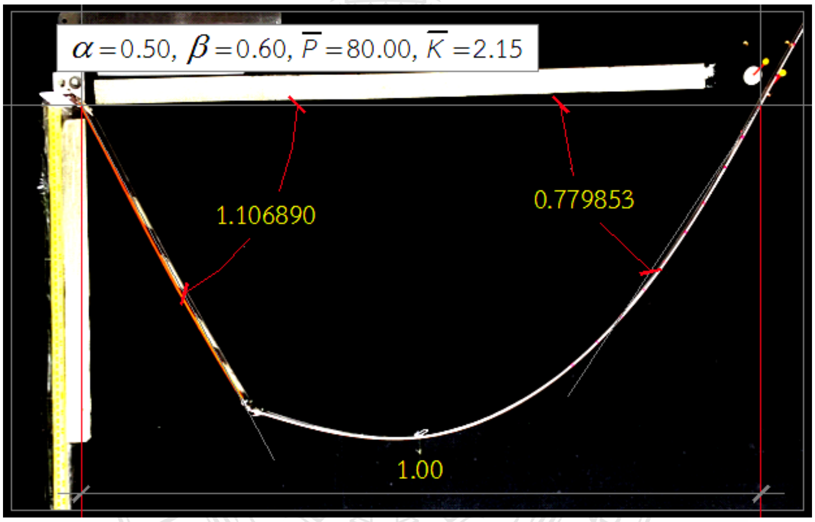




$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
2.15	1.298706	35.000116	0.660104	0.069698	-0.239934	0.151274	-1.325100	0.504310

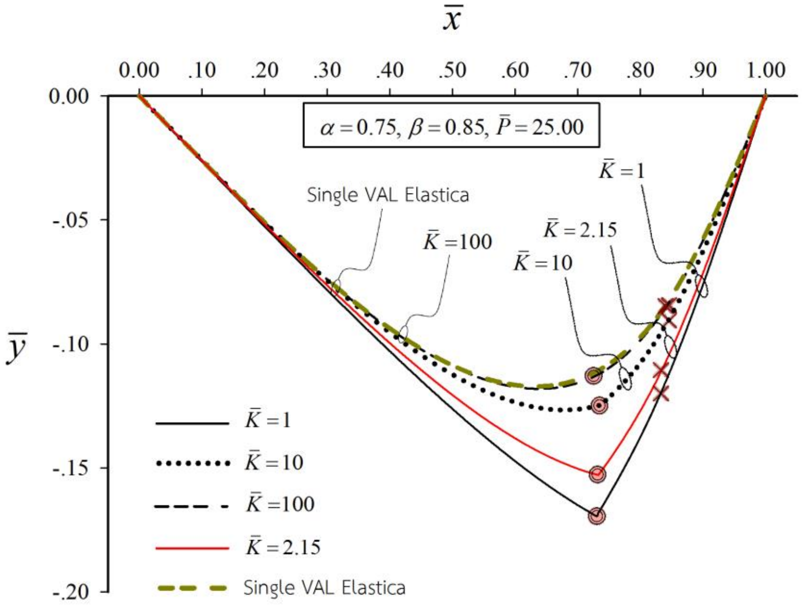
รูปที่ 4.5 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 35.00$ ค่า $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.35$ และ $\bar{K} = 1,\ 10,\ 100,\ 2.15,$ Single VAL Elastica

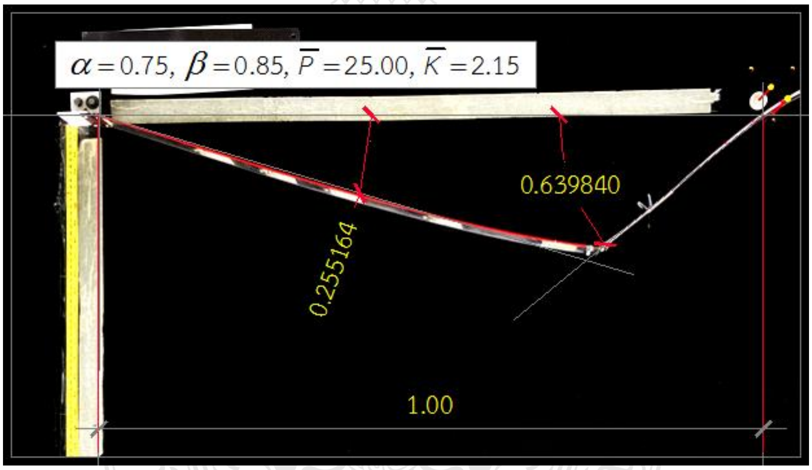




$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
2.15	1.437165	80.000075	0.779853	0.237754	-0.439464	0.332463	-1.106890	0.528954

รูปที่ 4.6 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 80.00$ ค่า $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.60$ และ $\bar{K} = 1,\ 10,\ 100,\ 2.15,$ Single VAL Elastica





$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
2.15	1.059134	25.001233	0.639840	0.733193	-0.152886	0.825655	-0.255164	0.393921

รูปที่ 4.7 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 25.00$ ค่า $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.85$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15$, Single VAL Elastica

4.2 ผลการศึกษาในกรณีที่ 2 ($\alpha = \beta$)

4.2.1 ตรวจสอบและเปรียบเทียบความถูกต้องของผลการคำนวณ

จากตารางที่ 4.4, 4.5 และ 4.6 แสดงการเปรียบเทียบผลของอิลาสติกคาที่มีค่าสติฟเนสของสปริง $\bar{K} = 100$ กับอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) ในกรณีที่ตำแหน่งของสปริงและแรงกระทำมีค่าเท่ากับ $\alpha = 0.25, 0.50, 0.75$ พบว่าคำตอบที่ได้มีค่าที่ใกล้เคียงกัน

ตารางที่ 4.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 ($\alpha = \beta$) โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$ ค่า $\bar{K} = 1, 10, 100$ และ Single VAL Elastica

$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.08	4.672940	0.288949	0.189041	-0.163479	-0.740535	0.673453
	1.16	9.699650	0.376687	0.123231	-0.217355	-1.092328	0.945224
	1.24	26.015014	0.424572	0.053221	-0.244087	-1.397034	1.158072
	1.29	181.297287	0.444897	0.008186	-0.249792	-1.560088	1.295172
10	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.08	12.417125	0.408840	0.201367	-0.147243	-0.704335	0.183739
	1.16	23.230372	0.534874	0.150730	-0.198267	-1.015688	0.256241
	1.24	42.545817	0.605750	0.098705	-0.228435	-1.265241	0.312056
	1.32	99.545300	0.649802	0.047407	-0.244479	-1.466783	0.361873
	1.39	598.342154	0.680966	0.008787	-0.249645	-1.562840	0.414780
100	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.08	14.577915	0.437074	0.206649	-0.139334	-0.679810	0.021939
	1.16	26.617925	0.568602	0.161448	-0.189118	-0.977076	0.030843
	1.24	45.655164	0.639850	0.114851	-0.220171	-1.213063	0.037820
	1.32	86.476564	0.681445	0.068716	-0.238718	-1.404609	0.043835
	1.40	241.049137	0.708770	0.027101	-0.247680	-1.532717	0.049684
	1.45	943.406781	0.723317	0.007425	-0.249701	-1.564023	0.054081
Single VAL Elastica	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	-	0.000000	-
	1.08	14.854381	0.440512	0.207390	-	-0.676079	-
	1.16	27.044225	0.572633	0.162935	-	-0.971421	-
	1.24	46.038848	0.643814	0.117073	-	-1.205665	-
	1.32	85.383891	0.685015	0.071627	-	-1.395863	-
	1.40	220.675684	0.711559	0.030398	-	-1.525725	-
	1.45	696.947091	0.725147	0.010251	-	-1.561028	-

ตารางที่ 4.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$
โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50$ ค่า $\bar{K} = 1, 10, 100$ และ Single VAL Elastica

$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.10	3.179904	0.447555	0.445272	-0.226306	-0.520776	0.631631
	1.20	5.454395	0.569147	0.381183	-0.322205	-0.767106	0.858015
	1.30	8.140228	0.627974	0.307898	-0.392516	-0.978660	1.020412
	1.40	11.801602	0.654527	0.225735	-0.444732	-1.176753	1.153499
	1.50	19.187022	0.662532	0.135365	-0.480102	-1.366606	1.272845
	1.62	131.388685	0.661063	0.018600	-0.499421	-1.555182	1.449036
10	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.10	9.778694	0.530762	0.446926	-0.215267	-0.585548	0.186494
	1.20	18.371665	0.670840	0.386804	-0.307266	-0.834404	0.262464
	1.30	29.709958	0.728807	0.318835	-0.376204	-1.034253	0.327089
	1.40	44.312528	0.751806	0.244056	-0.428738	-1.208034	0.384015
	1.50	67.498485	0.761375	0.164874	-0.466342	-1.358206	0.434766
	1.62	158.354357	0.767060	0.069200	-0.492806	-1.497348	0.499410
100	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.10	12.272982	0.553009	0.447768	-0.209116	-0.601838	0.023254
	1.20	24.103534	0.694132	0.389383	-0.299332	-0.849691	0.033927
	1.30	40.482302	0.747063	0.323624	-0.367788	-1.044068	0.043988
	1.40	61.369412	0.765886	0.252070	-0.420516	-1.207937	0.053139
	1.50	91.880124	0.773185	0.177625	-0.458986	-1.345317	0.061113
	1.60	156.827275	0.776625	0.104008	-0.484197	-1.454144	0.068543
Single VAL Elastica	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	-	0.000000	-
	1.10	12.627286	0.555849	0.447894	-	-0.603862	-
	1.20	24.968196	0.697006	0.389772	-	-0.851545	-
	1.30	42.184692	0.749183	0.324370	-	-1.045083	-
	1.40	64.128782	0.767421	0.253358	-	-1.207436	-
	1.50	95.779841	0.774393	0.179693	-	-1.342963	-
	1.60	160.909662	0.777619	0.107083	-	-1.450278	-

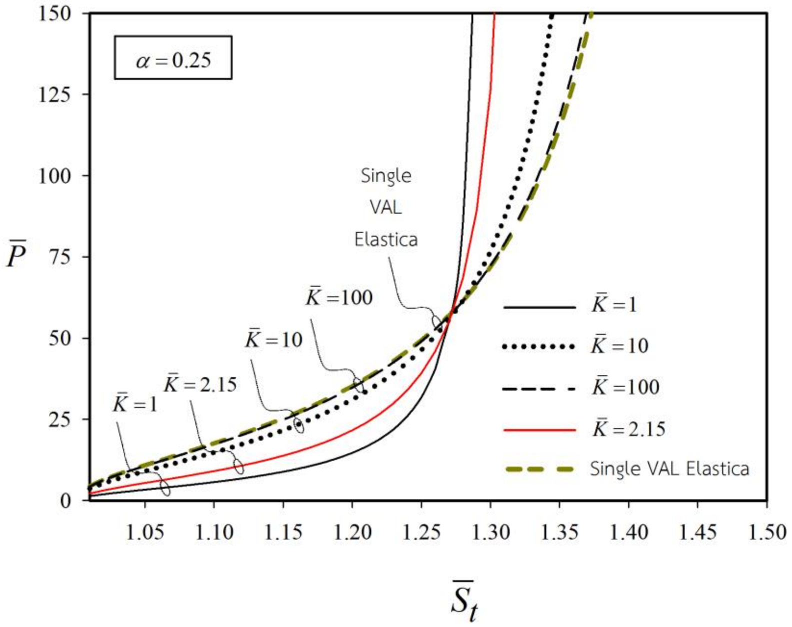
ตารางที่ 4.6 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha=\beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75$ ค่า $\bar{K} = 1, 10, 100$ และ Single VAL Elastica

$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.02	1.994275	0.343133	0.744439	-0.087039	-0.156499	0.333244
	1.04	3.154899	0.468997	0.738563	-0.125372	-0.221223	0.461150
	1.06	4.437359	0.556010	0.732366	-0.156246	-0.270552	0.554224
	1.08	6.088193	0.622226	0.725852	-0.183435	-0.311401	0.630058
	1.10	8.475988	0.674741	0.719028	-0.208370	-0.346000	0.696454
	1.18	88.530584	0.783427	0.688640	-0.296349	-0.425582	0.986204
10	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.02	5.590120	0.340746	0.742147	-0.079426	-0.214229	0.095291
	1.04	9.072625	0.475040	0.734739	-0.116047	-0.293534	0.137037
	1.06	13.364085	0.573860	0.727770	-0.146555	-0.345796	0.172629
	1.08	19.943357	0.653190	0.721289	-0.174311	-0.379477	0.209040
	1.10	32.205271	0.716598	0.715324	-0.200658	-0.396099	0.253154
	1.13	80.900678	0.772063	0.706495	-0.238401	-0.400609	0.350817
100	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.02	6.682037	0.333697	0.741017	-0.075347	-0.229494	0.011530
	1.04	10.963970	0.469990	0.732786	-0.110864	-0.313143	0.016944
	1.06	16.510549	0.573819	0.725359	-0.140966	-0.366099	0.021979
	1.08	25.851344	0.660251	0.718898	-0.168861	-0.396001	0.027873
	1.10	46.090006	0.729733	0.713490	-0.195886	-0.403248	0.036602
	1.12	94.242764	0.770230	0.708284	-0.222129	-0.399187	0.050881
Single VAL Elastica	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	-	0.000000	-
	1.02	6.824257	0.332484	0.740852	-	-0.231418	-
	1.04	11.212824	0.468967	0.732492	-	-0.315670	-
	1.06	16.936258	0.573475	0.724986	-	-0.368771	-
	1.08	26.712012	0.660993	0.718512	-	-0.398168	-
	1.10	48.420668	0.731452	0.713174	-	-0.404033	-
	1.12	100.974842	0.771456	0.708013	-	-0.399164	-

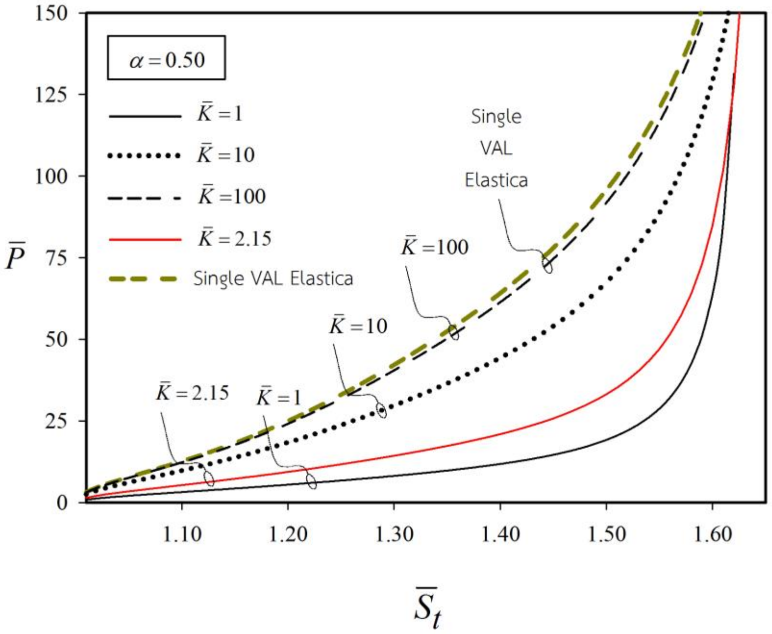
4.4.2 พฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคา

เมื่อนำผลที่ได้มาเขียนเส้นโค้งการเบี่ยงเบนของแรง (Load - Deflection Curves) ดังแสดงในกราฟรูปที่ 4.8, 4.9 และ 4.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $(\bar{P})$ กับความยาวส่วนโค้ง $(\bar{S}_t)$ เมื่อแปรผันค่า $\bar{K}$ ตั้งแต่ 1 - 100 (ระบบจะไร้เสถียรภาพเมื่อกำหนดให้ $\bar{K}=0$) และแปรผันค่า α ที่ระยะ 0.25, 0.50 และ 0.75 ตามลำดับ เริ่มแรกเมื่อทำการเพิ่มแรง $\bar{P}$ ให้กับอิลาสติกคาค่าของแรง $\bar{P}$ จะเพิ่มขึ้นในขณะที่ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{S}_t$ ก็เพิ่มขึ้นเช่นกันซึ่งเป็นการเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องโดยไม่พบจุดวิกฤต ดังกรณีที่ $\alpha=0.25$ (รูปที่ 4.8) จะเห็นได้ว่าอิลาสติกคามีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้นเมื่อแรงกระทำ $\bar{P}$ มีค่าเพิ่มขึ้น ลักษณะเช่นนี้ความชันของกราฟความสัมพันธ์มีค่าเป็นบวกเป็นการบ่งบอกถึงระบบที่มีเสถียรภาพ (สมดุลแบบมีเสถียรภาพ) และเมื่อทำการเพิ่มแรงอย่างต่อเนื่องอิลาสติกคาจะเกิดการดึงรั้งทำให้ความชันของกราฟมีค่าที่สูงมาก โดยที่การเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{S}_t$ ที่เพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของแรงกระทำ $\bar{P}$ ที่มีค่ามากจนกระทั่งไม่สามารถคำนวณผลได้อีกต่อไป พฤติกรรมในลักษณะดังกล่าวจะพบได้ในกรณีที่ $\alpha=0.50$ และ 0.75 เช่นกัน ในขณะที่ผลกระทบของสติฟเนสของสปริง จะพบว่าค่าสติฟเนสของสปริงที่มีค่าน้อยส่งผลให้ระบบมีสติฟเนสต่ำในช่วงแรก แต่เมื่อระบบเกิดการยึดรั้งสติฟเนสของอิลาสติกคาจะมีค่าที่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว และเมื่อสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุนมีค่าที่เพิ่มขึ้น พฤติกรรมของอิลาสติกคาจะสอดคล้องกับพฤติกรรมของอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน โดยที่ภาพรวมทั้งหมดของพฤติกรรมการแอ่นตัวของอิลาสติกคาที่เกิดขึ้นในแต่ละกรณีได้แสดงไว้ในกราฟรูปที่ 4.11 ซึ่งจะเห็นได้ว่าตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกที่อยู่ใกล้จุดรองรับด้านใดด้านหนึ่งมีโอกาสเกิดการดึงรั้งของอิลาสติกคาสูงทำให้ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดมีค่าน้อย เมื่อเทียบกับกรณีที่น้ำหนักบรรทุกกระทำอยู่บริเวณกึ่งกลางอิลาสติกคา

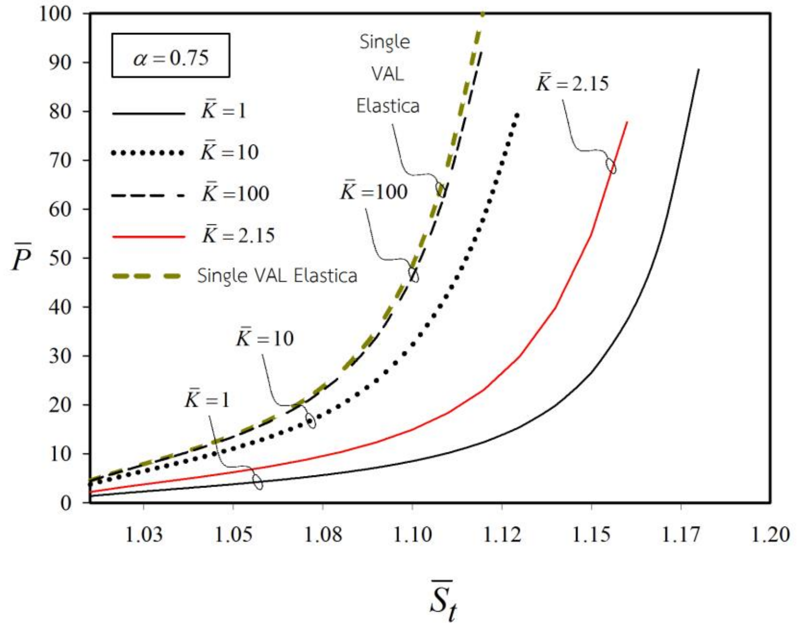
จากกราฟในรูปที่ 4.12, 4.13 และ 4.14 แสดงรูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคา เมื่อกำหนดแรง $\bar{P}=85.00$ โดยแปรผันค่า $\alpha=0.25$, 0.50 และ 0.75 แปรผันค่า $\bar{K}$ ตั้งแต่ 1, 10, 100, 2.15 และอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) แสดงให้เห็นว่าเมื่อค่าสติฟเนสของสปริงมีค่าน้อย พฤติกรรมการแอ่นตัวของอิลาสติกคาจะแสดงให้เห็นถึงจุดต้านทานการหมุนที่ส่งถ่ายค่าโมเมนต์ดัดได้อย่างไม่สมบูรณ์เกิดเป็นจุดหักมุมที่ชัดเจน และเมื่อแปรผันค่าสติฟเนสของสปริงให้มีค่าที่มากขึ้น อิลาสติกคาจะมีพฤติกรรมการแอ่นตัวที่มีค่าใกล้เคียงและสอดคล้องกับอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) เมื่อมีแรงกระทำที่เท่ากัน โดยที่ตำแหน่งของแรงกระทำและสปริงจะยึดติดอยู่กับตำแหน่งเดิมเสมอ (วงกลมสีแดง) เมื่อความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้นจนกระทั่งเกิดการดึงรั้งทำให้ไม่สามารถเพิ่มความยาวส่วนโค้งต่อไปได้อีก



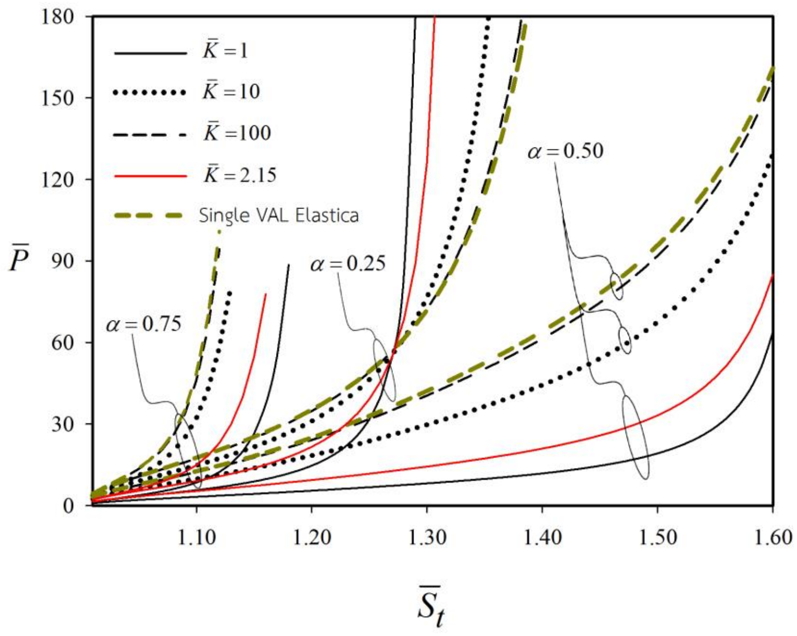
รูปที่ 4.8 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.25$ และ $\bar{K} = 1,\ 10,\ 100,\ 2.15,$ Single VAL Elastica



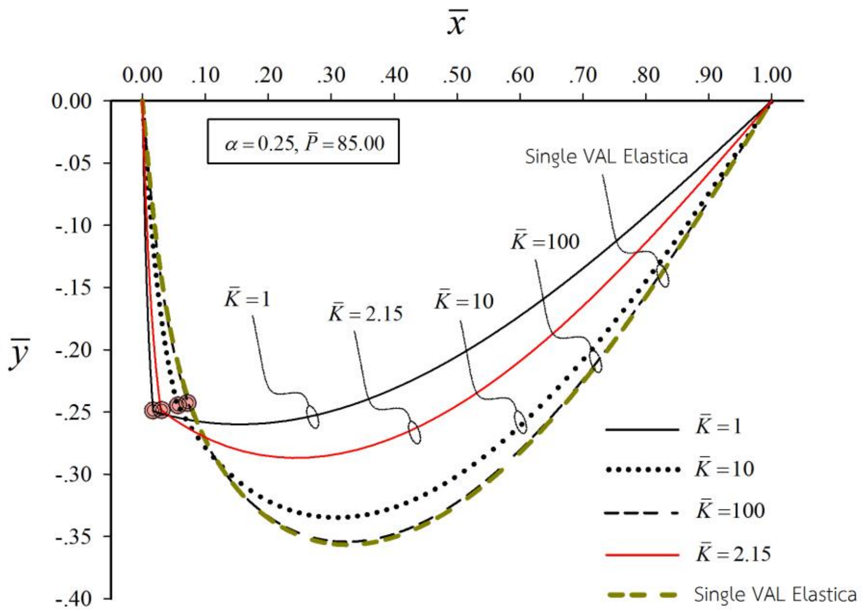
รูปที่ 4.9 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.50$ และ $\bar{K} = 1,\ 10,\ 100,\ 2.15,$ Single VAL Elastica

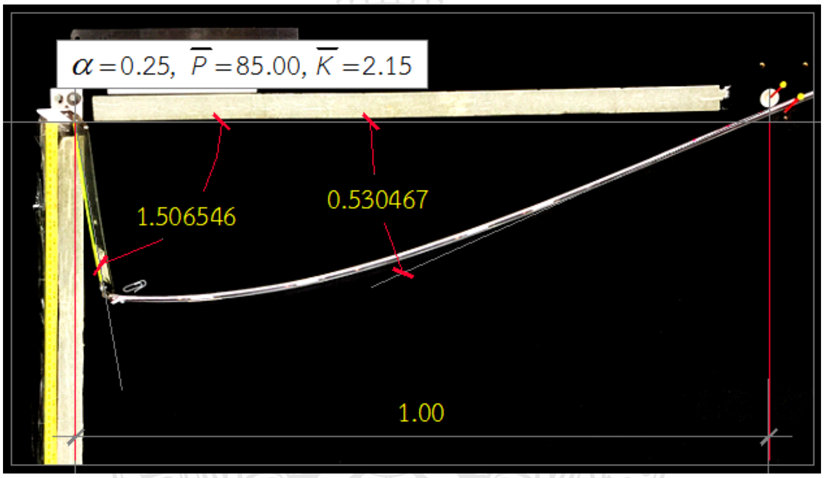


รูปที่ 4.10 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.75$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica



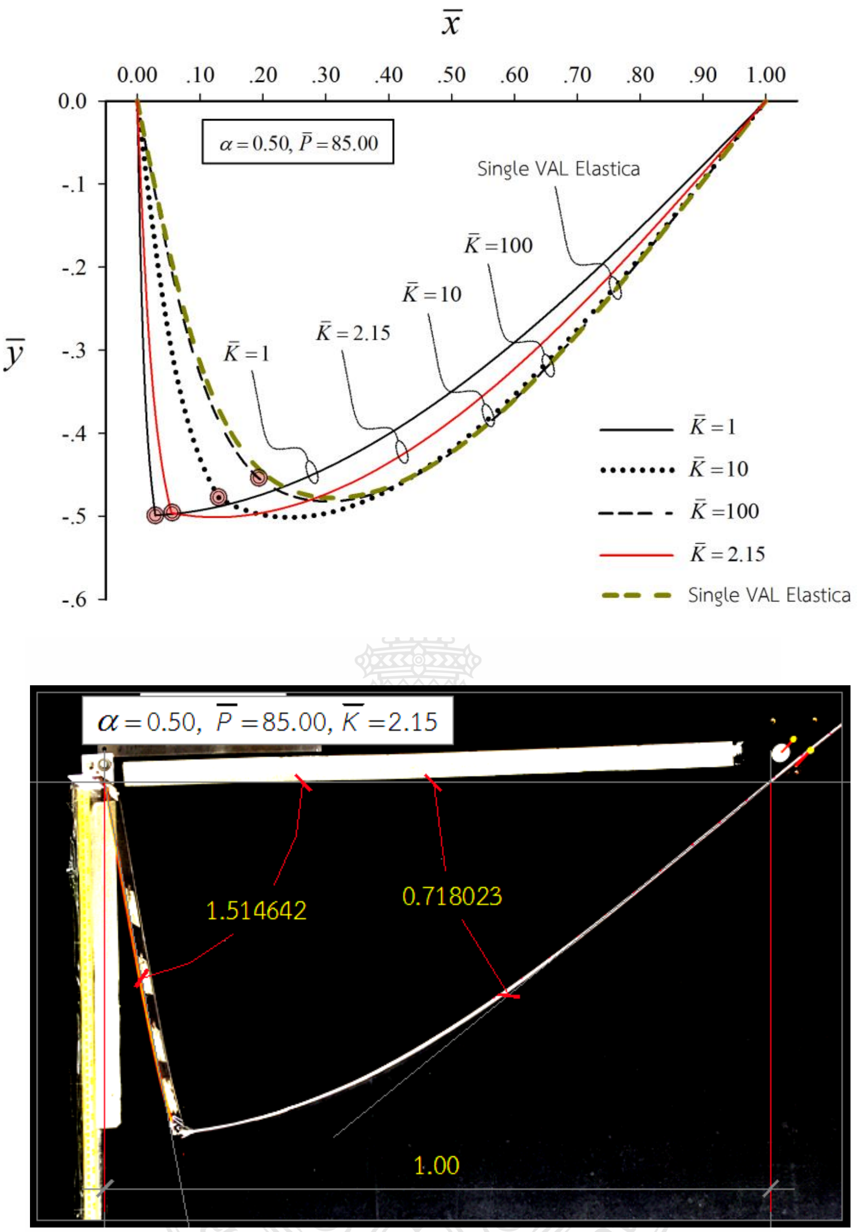
รูปที่ 4.11 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.25, 0.50, 0.75$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica





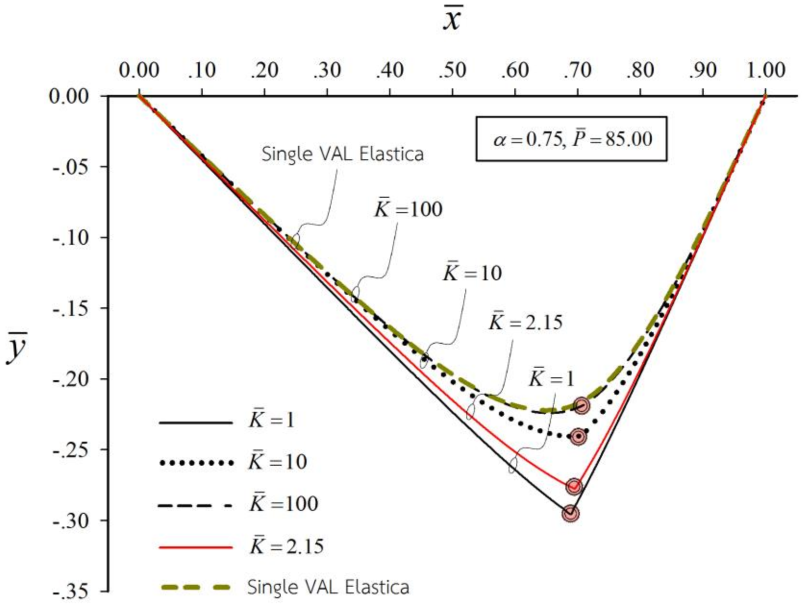
$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
2.15	1.288332	85.000088	0.530467	0.028934	-0.247987	-1.506546	0.944412

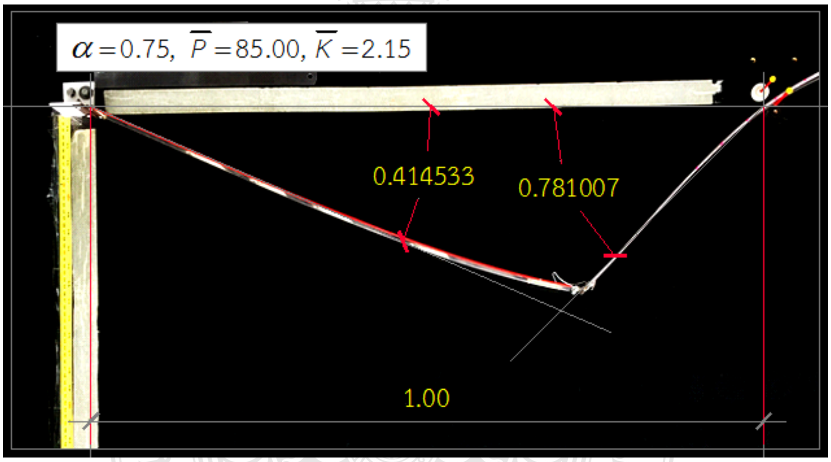
รูปที่ 4.12 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 2 ($\alpha = \beta$) เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 85.00$ ค่า $\alpha = 0.25$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica



$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}^*$	$\bar{y}^*$	θ_A	$\Delta\theta$
2.15	1.599968	85.000392	0.718023	0.054363	-0.495943	-1.514642	1.101267

รูปที่ 4.13 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 85.00$ ค่า $\alpha = 0.50$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica





$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
2.15	1.162405	85.000236	0.781007	0.695679	-0.277635	-0.414533	0.800733

รูปที่ 4.14 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 85.00$ ค่า $\alpha = 0.75$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica

4.3 ผลการศึกษาในกรณีที่ 3 ($\alpha > \beta$)

4.3.1 ตรวจสอบและเปรียบเทียบความถูกต้องของผลการคำนวณ

จากตารางที่ 4.7 ในกรณีที่ตำแหน่งของสปริงมีค่าคงที่ $\alpha = 0.25$ และตำแหน่งของแรงกระทำมีค่า $\beta = 0.15$ ตารางที่ 4.8 ในกรณีที่ตำแหน่งของสปริงมีค่าคงที่ $\alpha = 0.50$ และตำแหน่งของแรงกระทำมีค่า $\beta = 0.35$ และตารางที่ 4.9 ในกรณีที่ตำแหน่งของสปริงมีค่าคงที่ $\alpha = 0.75$ และตำแหน่งของแรงกระทำมีค่า $\beta = 0.50$ เมื่อทำการเปรียบเทียบผลของอิลาสติกคาที่มีค่าสติฟเนสของสปริง $\bar{K} = 100$ กับอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) พบว่าคำตอบที่ได้นั้นมีค่าที่ใกล้เคียงกัน

ตารางที่ 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$ ค่า $\beta = 0.15$ ค่า $\bar{K} = 1, 10, 100$ และ Single VAL Elastica

$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.06	6.229431	0.253353	0.204654	-0.143325	0.120648	-0.652077	0.569865
	1.12	11.489384	0.337059	0.156478	-0.194603	0.089833	-0.950447	0.800233
	1.18	21.088616	0.387929	0.105690	-0.226104	0.057756	-1.201144	0.976732
	1.24	54.388883	0.420409	0.052597	-0.243882	0.024751	-1.431833	1.128613
	1.28	424.047670	0.435785	0.016286	-0.249034	0.003338	-1.563379	1.228306
10	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.06	16.446375	0.349765	0.212267	-0.130107	0.122338	-0.657650	0.148944
	1.12	29.751503	0.467121	0.173242	-0.177499	0.094400	-0.945281	0.207057
	1.18	50.874824	0.539738	0.133073	-0.208327	0.066380	-1.176106	0.250620
	1.24	97.967165	0.588303	0.092199	-0.228686	0.038816	-1.374531	0.287200
	1.30	309.907622	0.623045	0.051746	-0.241022	0.013365	-1.530573	0.321034
	1.34	3037.124075	0.644233	0.027110	-0.246036	0.001453	-1.569666	0.347881
100	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.06	19.263990	0.372235	0.215410	-0.124033	0.123646	-0.649300	0.017535
	1.12	34.550469	0.495418	0.179639	-0.169888	0.097047	-0.931826	0.024429
	1.18	57.834644	0.570287	0.142758	-0.200416	0.070347	-1.157475	0.029647
	1.24	104.712031	0.619287	0.105216	-0.221395	0.044119	-1.349754	0.034046
	1.30	255.827333	0.653180	0.068075	-0.235132	0.019771	-1.503160	0.038035
	1.36	2519.740143	0.680643	0.034444	-0.243692	0.002193	-1.568912	0.042455
Single VAL Elastica	1.00	0.000000	0.000000	-	-	0.000000	0.000000	-
	1.06	19.623782	0.374983	-	-	0.123844	-0.647852	-
	1.12	35.154345	0.498837	-	-	0.097435	-0.929657	-
	1.18	58.684955	0.573921	-	-	0.070914	-1.154659	-
	1.24	105.468845	0.622905	-	-	0.044857	-1.346224	-
	1.30	251.017205	0.656632	-	-	0.020649	-1.499286	-
	1.36	2006.759588	0.683533	-	-	0.002818	-1.568225	-

ตารางที่ 4.8 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 ($\alpha > \beta$) โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50$ ค่า $\beta = 0.35$ ค่า $\bar{K} = 1, 10, 100$ และ Single VAL Elastica

$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.10	4.293331	0.441546	0.444715	-0.225243	0.304703	-0.558487	0.587142
	1.20	7.489211	0.560493	0.379999	-0.320580	0.252901	-0.823282	0.793206
1	1.30	11.577911	0.617951	0.306098	-0.390403	0.195283	-1.047727	0.941458
	1.40	18.059253	0.644147	0.223434	-0.442261	0.132925	-1.251951	1.066853
	1.50	34.973212	0.652328	0.132734	-0.477510	0.067356	-1.439019	1.183720
	1.55	392.078594	0.652483	0.036057	-0.496482	0.005777	-1.566190	1.324166
	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.10	11.306918	0.494854	0.443126	-0.211283	0.296225	-0.662991	0.148330
	1.20	20.869891	0.627848	0.378759	-0.300630	0.237288	-0.956931	0.199591
10	1.30	35.131353	0.689744	0.306975	-0.366371	0.173983	-1.191512	0.238869
	1.40	62.282383	0.720015	0.229289	-0.416407	0.109254	-1.381174	0.275914
	1.50	149.131229	0.736863	0.148419	-0.453780	0.048266	-1.512800	0.316600
	1.57	564.162670	0.746134	0.092284	-0.473886	0.013351	-1.558179	0.353741
	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.10	13.351619	0.505244	0.442460	-0.205193	0.294431	-0.686777	0.017456
	1.20	24.991580	0.639933	0.378164	-0.292323	0.234030	-0.985997	0.023642
100	1.30	42.994941	0.701331	0.307016	-0.356631	0.169505	-1.220866	0.028553
	1.40	79.022004	0.731238	0.230909	-0.406003	0.104262	-1.404004	0.033355
	1.50	202.099290	0.748304	0.153098	-0.443861	0.044227	-1.521506	0.038864
	1.55	482.567043	0.755007	0.115042	-0.459409	0.019395	-1.551909	0.042365
	1.00	0.000000	0.000000	-	-	0.000000	0.000000	-
	1.10	13.620169	0.506467	-	-	0.294221	-0.689690	-
	1.20	25.540472	0.641355	-	-	0.233651	-0.989519	-
Single VAL Elastica	1.30	44.062195	0.702681	-	-	0.168984	-1.224354	-
	1.40	81.357209	0.732528	-	-	0.103683	-1.406590	-
	1.50	209.816435	0.749583	-	-	0.043763	-1.522390	-
	1.55	505.051341	0.756265	-	-	0.019078	-1.552216	-

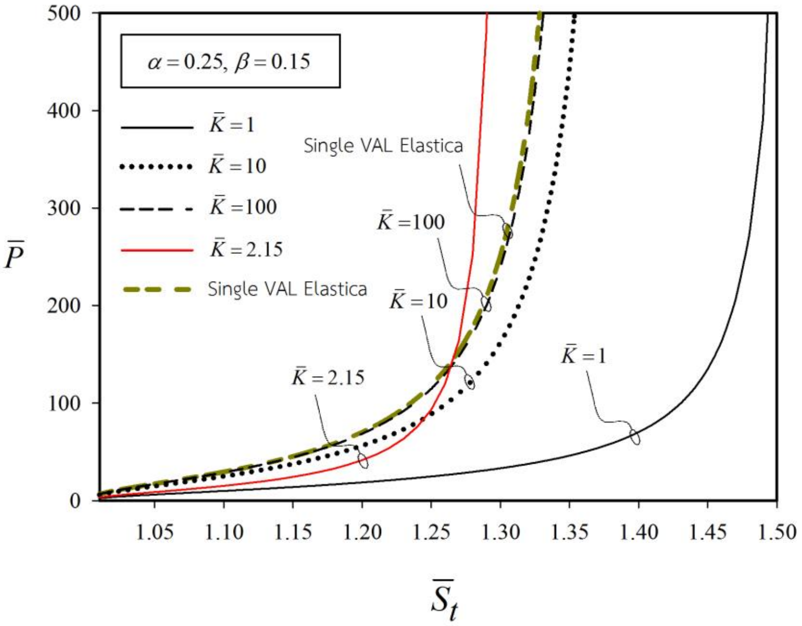
ตารางที่ 4.9 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75$ ค่า $\beta = 0.50$ ค่า $\bar{K} = 1, 10, 100$ และ Single VAL Elastica

$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.20	17.042112	0.737761	0.657302	-0.291315	0.408901	-0.746776	0.542815
	1.30	31.066780	0.768102	0.592409	-0.368867	0.345331	-0.963638	0.550027
	1.40	46.496125	0.776707	0.522172	-0.440119	0.277866	-1.137117	0.585183
	1.50	62.980982	0.779407	0.448703	-0.507691	0.210860	-1.275805	0.659412
	1.60	83.381592	0.780009	0.372093	-0.571544	0.147782	-1.384564	0.770017
	1.81	218.574683	0.777109	0.196331	-0.685943	0.038678	-1.530852	1.090609
10	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.10	11.727801	0.572730	0.696287	-0.173078	0.450034	-0.585342	0.101392
	1.20	23.506497	0.706605	0.638311	-0.265970	0.393086	-0.833200	0.124414
	1.30	39.810969	0.753527	0.572966	-0.344164	0.328325	-1.029674	0.136118
	1.40	60.014940	0.769447	0.501825	-0.414228	0.258152	-1.194004	0.150213
	1.50	87.704816	0.775373	0.426374	-0.478397	0.185762	-1.330717	0.170624
	1.62	158.143682	0.778317	0.331347	-0.548463	0.101087	-1.457471	0.204468
100	1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	1.10	12.531435	0.557816	0.692701	-0.166388	0.448117	-0.601910	0.011427
	1.20	24.807955	0.698137	0.633424	-0.258577	0.390127	-0.849551	0.014479
	1.30	41.914716	0.749694	0.567694	-0.336548	0.324801	-1.043386	0.016197
	1.40	63.649612	0.767655	0.496207	-0.406016	0.253884	-1.205960	0.018088
	1.50	94.826223	0.774503	0.420332	-0.469101	0.180359	-1.341635	0.020639
	1.59	148.846452	0.777417	0.349158	-0.521067	0.114981	-1.439685	0.023623
Single VAL Elastica	1.00	0.000000	0.000000	-	-	0.000000	0.000000	-
	1.10	12.627286	0.555849	-	-	0.447894	-0.603862	-
	1.20	24.968196	0.697006	-	-	0.389772	-0.851545	-
	1.30	42.184692	0.749183	-	-	0.324370	-1.045083	-
	1.40	64.128782	0.767421	-	-	0.253358	-1.207436	-
	1.50	95.779841	0.774393	-	-	0.179693	-1.342963	-
	1.59	151.073454	0.777374	-	-	0.114163	-1.440875	-

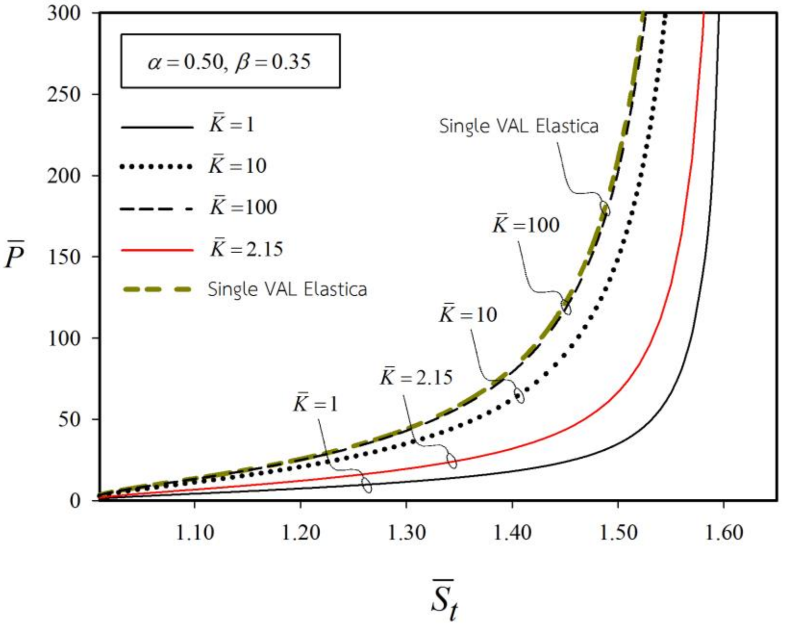
4.3.2 พฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคา

เมื่อนำผลที่ได้มาเขียนเส้นโค้งการเบี่ยงเบนของแรง (Load - Deflection Curves) ดังแสดงในกราฟรูปที่ 4.15, 4.16 และ 4.17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $(\bar{P})$ กับความยาวส่วนโค้ง $(\bar{S}_t)$ เมื่อแปรผันค่า $\bar{K}$ ตั้งแต่ 1 - 100 (ระบบจะไร้เสถียรภาพเมื่อกำหนดให้ $\bar{K}=0$) และแปรผันค่า $\alpha=0.25,\ \beta=0.15,\ \alpha=0.50,\ \beta=0.35$ และ $\alpha=0.75,\ \beta=0.50$ เริ่มแรกเมื่อทำการเพิ่มแรง $\bar{P}$ ให้กับอิลาสติกคา ค่าของแรง $\bar{P}$ จะเพิ่มขึ้นในขณะที่ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{S}_t$ ก็เพิ่มขึ้นเช่นกัน ซึ่งเป็นการเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องโดยไม่พบจุดวิกฤต จะเห็นได้ว่าอิลาสติกคามีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้นเมื่อแรงกระทำ $\bar{P}$ มีค่าเพิ่มขึ้นลักษณะเช่นนี้ความชันของกราฟความสัมพันธ์มีค่าเป็นบวกเป็นการบ่งบอกถึงระบบที่มีเสถียรภาพ (สมดุลแบบมีเสถียรภาพ) และเมื่อทำการเพิ่มแรงอย่างต่อเนื่องอิลาสติกคาจะเกิดการดึงรั้งทำให้ความชันของกราฟมีค่าที่สูงมาก โดยที่การเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{S}_t$ ที่เพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของแรงกระทำ $\bar{P}$ ที่มีค่ามากจนกระทั่งไม่สามารถคำนวณผลได้อีกต่อไป พฤติกรรมในลักษณะดังกล่าวจะพบได้ในกรณีที่ $\alpha=0.75,\ \beta=0.50$ ในขณะที่ผลกระทบของสติฟเนสของสปริง จะพบว่าค่าสติฟเนสของสปริงที่มีค่าน้อยส่งผลให้ระบบมีสติฟเนสต่ำในช่วงแรก แต่เมื่อระบบเกิดการยึดรั้งสติฟเนสของอิลาสติกคาจะมีค่าที่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว และเมื่อสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุนมีค่าที่เพิ่มขึ้น พฤติกรรมของอิลาสติกคาจะสอดคล้องกับพฤติกรรมของอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน โดยที่ภาพรวมทั้งหมดของพฤติกรรมการแอ่นตัวของอิลาสติกคาที่เกิดขึ้นในแต่ละกรณีได้แสดงไว้ในกราฟรูปที่ 4.18

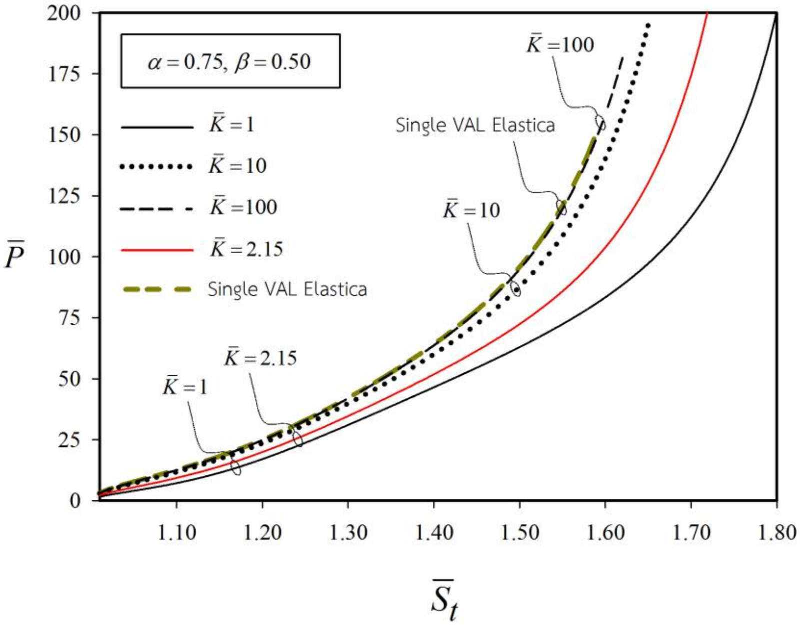
จากกราฟในรูปที่ 4.19, 4.20 และ 4.21 แสดงรูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคา เมื่อกำหนดแรง $\bar{P}=400.00$ แปรผันค่า $\alpha=0.25,\ \beta=0.15,\ \bar{P}=300.00$ แปรผันค่า $\alpha=0.50,\ \beta=0.35$ และ $\bar{P}=140.00$ แปรผันค่า $\alpha=0.75,\ \beta=0.50$ และในทุก ๆ กรณีจะแปรผันค่า $\bar{K}$ ตั้งแต่ 1, 10, 100, 2.15 และอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน แสดงให้เห็นว่าเมื่อค่าสติฟเนสของสปริงมีค่าน้อยพฤติกรรมการแอ่นตัวของอิลาสติกคา จะแสดงให้เห็นถึงจุดต้านทานการหมุนที่ส่งถ่ายค่าโมเมนต์ดัดได้อย่างไม่สมบูรณ์เกิดเป็นจุดหักมุมที่ชัดเจน และเมื่อแปรผันค่าสติฟเนสของสปริงให้มีค่าที่เพิ่มมากขึ้นอิลาสติกคาจะมีพฤติกรรมการแอ่นตัวที่มีค่าใกล้เคียง และสอดคล้องกับอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) เมื่อมีแรงกระทำที่เท่ากัน โดยที่ตำแหน่งของแรงกระทำ (กากบาทสีแดง) และตำแหน่งของสปริง (วงกลมสีแดง) จะยึดติดอยู่กับตำแหน่งเดิมเสมอ และเมื่อความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้นจนกระทั่งเกิดการดึงรั้งจะทำให้ไม่สามารถเพิ่มความยาวส่วนโค้งต่อไปได้อีก



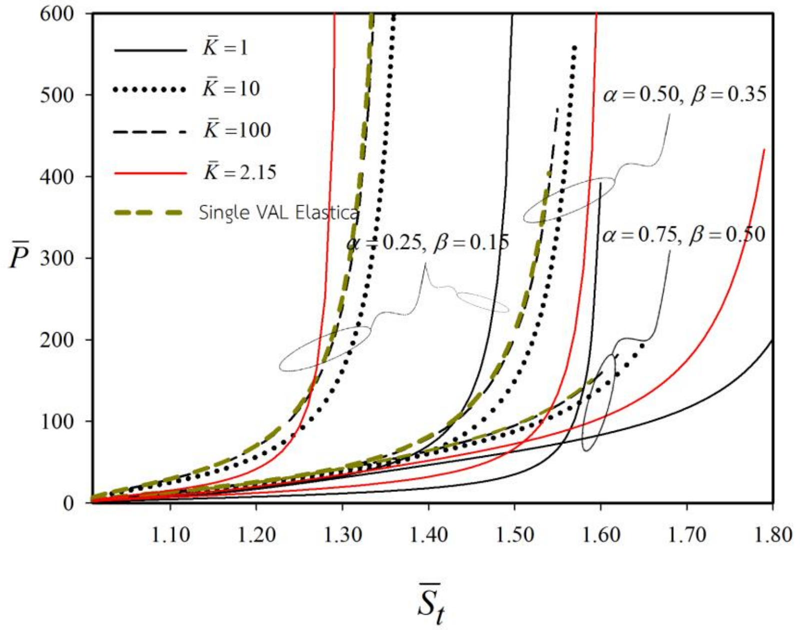
รูปที่ 4.15 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.15$ และ $\bar{K} = 1,\ 10,\ 100,\ 2.15,$ Single VAL Elastica



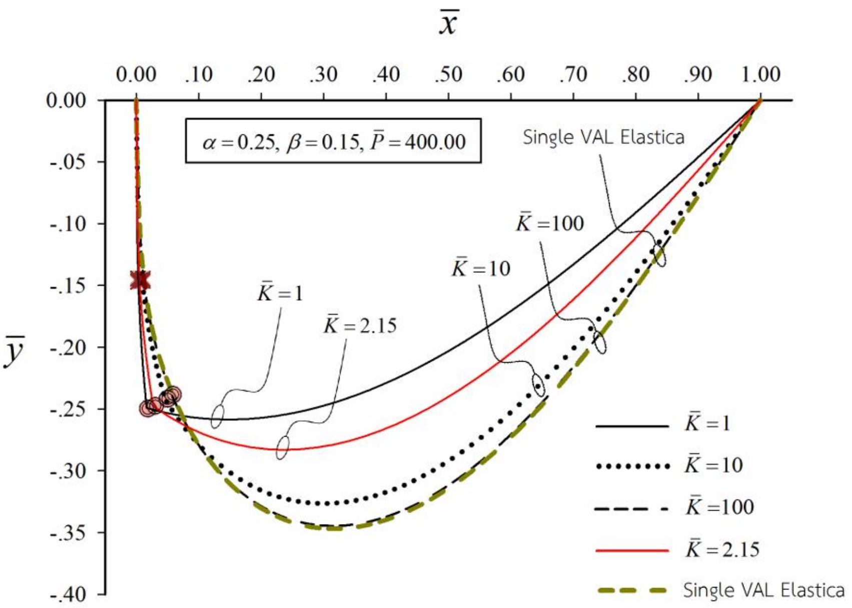
รูปที่ 4.16 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.35$ และ $\bar{K} = 1,\ 10,\ 100,\ 2.15,$ Single VAL Elastica

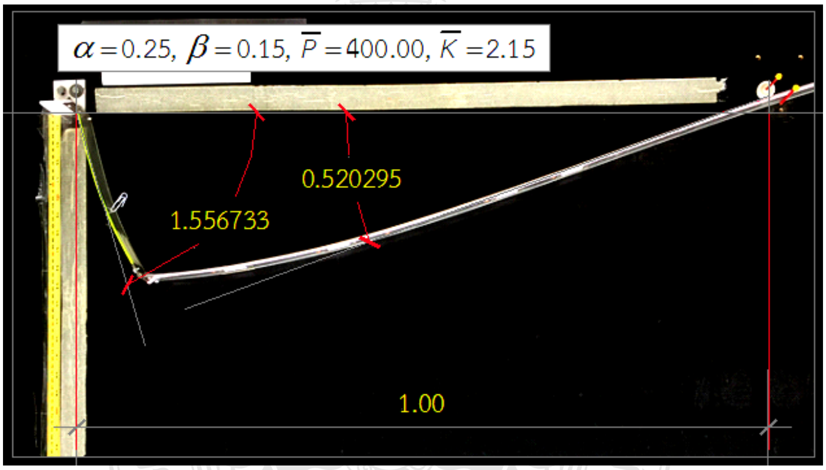


รูปที่ 4.17 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.50$ และ $\bar{K} = 1,\ 10,\ 100,\ 2.15,$ Single VAL Elastica



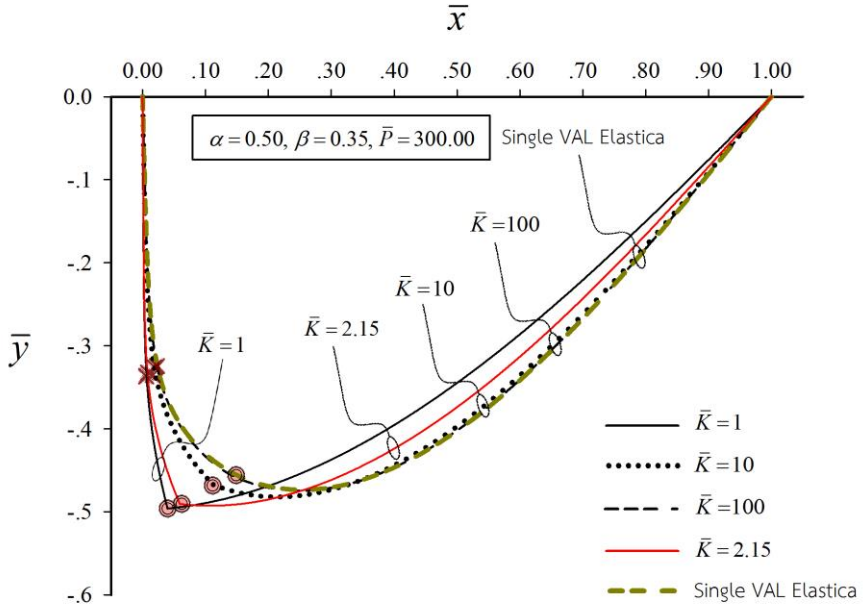
รูปที่ 4.18 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\bar{S}_t$ กรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ เมื่อค่า $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.15,\ \alpha = 0.50,\ \beta = 0.35,\ \alpha = 0.75,\ \beta = 0.50$ และ $\bar{K} = 1,\ 10,\ 100,\ 2.15,$ Single VAL Elastica

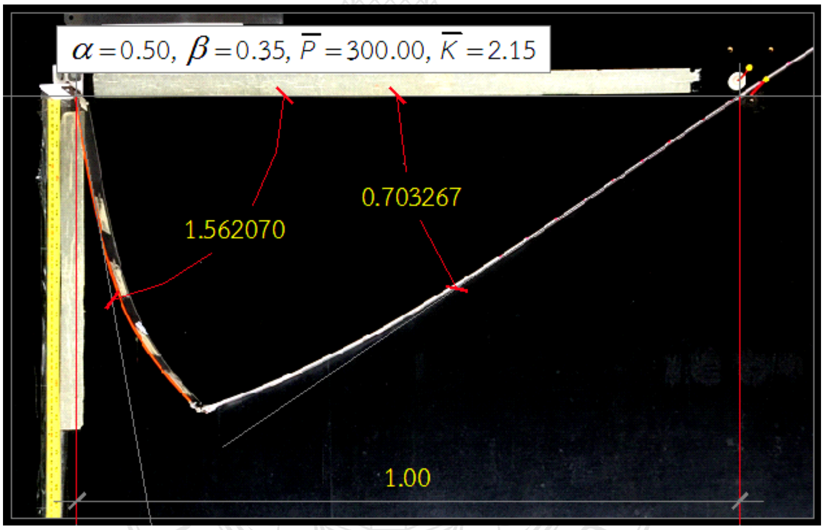




$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
2.15	1.287536	400.000266	0.520295	0.026955	-0.247402	0.005829	-1.556733	0.901567

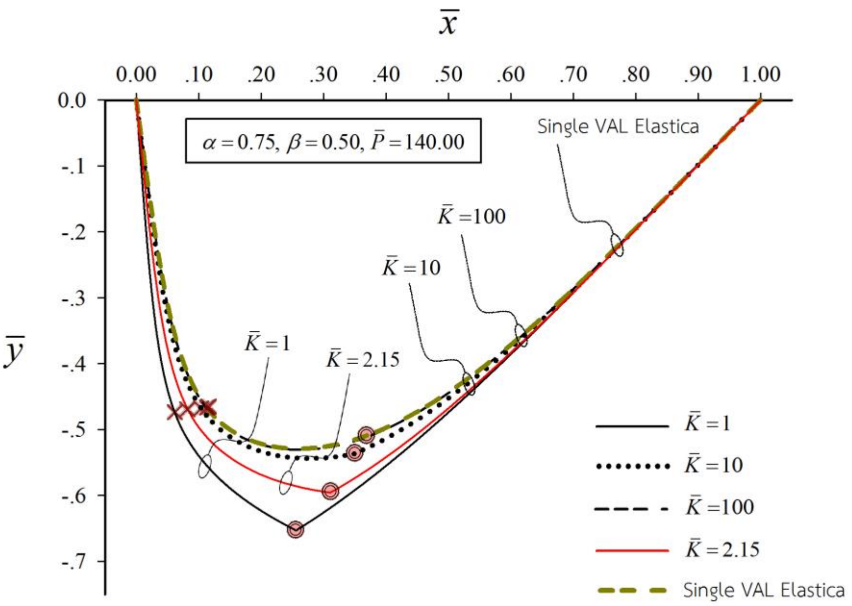
รูปที่ 4.19 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 400.00$ ค่า $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.15$ และ $\bar{K} = 1,\ 10,\ 100,\ 2.15,$ Single VAL Elastica

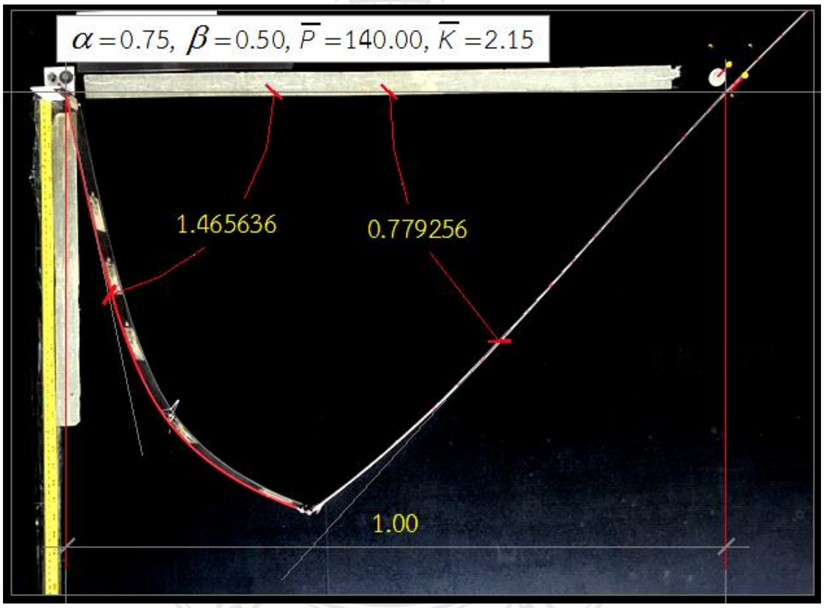




$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
2.15	1.588348	400.000077	0.703267	0.059123	-0.490504	0.009886	-1.562070	0.965555

รูปที่ 4.20 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 300.00$ ค่า $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.35$ และ $\bar{K} = 1,\ 10,\ 100,\ 2.15,$ Single VAL Elastica





$\bar{K}$	$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
2.15	1.663686	140.000229	0.779256	0.310801	-0.595637	0.093579	-1.465636	0.614437

รูปที่ 4.21 รูปร่างการแอ่นตัวของอิลาสติกคากรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\bar{P} = 140.00$ ค่า $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.50$ และ $\bar{K} = 1, 10, 100, 2.15,$ Single VAL Elastica

บทที่ 5
สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ

การศึกษางานวิจัยนี้ เพื่อศึกษาผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุดกระทำ ณ ตำแหน่งใด ๆ และมีจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงของอิลาสติกคา ณ ตำแหน่งใด ๆ และได้กำหนดรูปแบบตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงไว้ 3 กรณี คือ กรณีที่ระยะ $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ และ $\alpha > \beta$ และแปรผันค่าสติฟเนส $\bar{K} = 1,\ 10$ และ 100 พร้อมทั้งนำผลที่ได้จากการคำนวณไปเปรียบเทียบกับผลการทดสอบตัวอย่างกรณีวัสดุเป็นแบบเชิงเส้น จากผลของการวิเคราะห์สามารถสรุปตามวัตถุประสงค์หลักได้ดังนี้

5.1 พฤติกรรมการแอ่นตัวและเสถียรภาพของอิลาสติกคาในกรณีที่ 1 ระยะ $\alpha < \beta$

ในกรณีนี้พบว่าเมื่อเพิ่มแรงกระทำ $(\bar{P})$ ให้กับอิลาสติกคา ความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคา $(\bar{S}_t)$ จะมีค่าที่เพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องจนถึงค่าที่สูงสุดเพียงครั้งเดียวจนกระทั่งไม่สามารถคำนวณผลต่อไปได้อีก และมีสภาวะสมดุลเป็นแบบมีเสถียรภาพเท่านั้น ซึ่งเมื่อตำแหน่งของสปริง (α) และตำแหน่งของแรงกระทำ (β) มีตำแหน่งเข้าใกล้ปลายอิลาสติกคาด้านจุดรองรับที่เลื่อนได้แบบไร้แรงเสียดทานจะส่งผลทำให้ความชันของกราฟมีค่าที่สูงขึ้นแต่การเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $(\bar{S}_t)$ ได้ค่าที่เพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อย และเกิดการเปลี่ยนแปลงของแรงกระทำ $(\bar{P})$ ที่มีค่ามาก โดยสาเหตุที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากเกิดการดึงรั้งขึ้นซึ่งจะพบได้ในกรณีที่ $\alpha = 0.75$ เท่านั้น

ในส่วนของสติฟเนสของสปริง พบว่าเมื่อค่าสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุนมีค่าน้อยเป็นผลให้ระบบมีค่าสติฟเนสต่ำในช่วงแรก แต่เมื่อสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุนมีค่าที่เพิ่มขึ้นพฤติกรรมของอิลาสติกคาจะสอดคล้องกับพฤติกรรมของอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) และจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $(\bar{P})$ กับความยาวส่วนโค้ง $(\bar{S}_t)$ ในกรณีที่ทำการปรับเปลี่ยนค่าสติฟเนสของสปริงให้มีค่า $\bar{K} = 100$ เมื่อนำเส้นกราฟมาเปรียบเทียบกับเส้นกราฟกรณีอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) ปรากฏว่าเส้นกราฟที่ได้มีค่าที่ใกล้เคียงกัน และการทดสอบตัวอย่างแผ่นโพลีคาร์โบเนต (Polycarbonate Sheet) ที่มีค่าสติฟเนสของสปริง $\bar{K} = 2.15$ เมื่อนำผลของมุมที่ได้จากโปรแกรม AutoCAD มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณพบว่าคำตอบที่ได้มีค่าที่ใกล้เคียงกัน

5.2 พฤติกรรมการแอ่นตัวและเสถียรภาพของอิลาสติกคาในกรณีที่ 2 ระยะ $\alpha = \beta$

ในกรณีนี้พบว่าเมื่อเพิ่มแรงกระทำ $(\bar{P})$ ให้กับอิลาสติกคา ความยาวส่วนโค้ง $(\bar{S}_t)$ ของอิลาสติกคาจะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องโดยไม่พบจุดวิกฤตซึ่งจะพบได้ในกรที่ $\alpha = 0.25$ จะเห็นได้ว่าอิลาสติกคามีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้นเมื่อแรงกระทำ $(\bar{P})$ มีค่าเพิ่มขึ้น ลักษณะเช่นนี้ความชันของกราฟความสัมพันธ์มีค่าเป็นบวกเป็นการบ่งบอกถึงระบบที่มีเสถียรภาพ (สมดุลแบบมีเสถียรภาพ) และเมื่อทำการเพิ่มแรงอย่างต่อเนื่องอิลาสติกคาจะเกิดการดึงรั้งตามที่ได้อธิบายไว้ในกรณีที่ 1 แต่ในกรณีนี้จะพบได้เมื่อตำแหน่งของสปริงมีค่า $\alpha = 0.50$ และ 0.75

จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $(\bar{P})$ กับความยาวส่วนโค้ง $(\bar{S}_t)$ ในกรณีที่ทำการปรับเปลี่ยนค่าสติฟเนสของสปริงให้มีค่า $\bar{K} = 100$ เมื่อนำเส้นกราฟมาเปรียบเทียบกับเส้นกราฟกรณีอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) ปรากฏว่าเส้นกราฟที่ได้มีค่าที่ใกล้เคียงกันและจากการทดสอบตัวอย่างแผ่นโพลีคาร์โบเนต (Polycarbonate Sheet) ที่มีค่าสติฟเนสของสปริง $\bar{K} = 2.15$ เมื่อนำผลของมุมที่ได้จากโปรแกรม AutoCAD มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณพบว่าคำตอบที่ได้มีค่าที่ใกล้เคียงกัน

5.3 พฤติกรรมการแอ่นตัวและเสถียรภาพของอิลาสติกคาในกรณีที่ 3 ระยะ $\alpha > \beta$

เมื่อทำการเพิ่มแรงกระทำ $(\bar{P})$ ให้กับอิลาสติกคา ความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคา $(\bar{S}_t)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องจนถึงค่าที่สูงสุดจนกระทั่งไม่สามารถคำนวณผลต่อไปได้อีก และมีสภาวะสมดุลเป็นแบบมีเสถียรภาพ แต่ในกรณีนี้ได้พบว่าค่าของแรงกระทำ $(\bar{P})$ และค่าความยาวส่วนโค้ง $(\bar{S}_t)$ มีค่าที่สูงกว่าในกรณีที่ 1 และ 2

จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $(\bar{P})$ กับความยาวส่วนโค้ง $(\bar{S}_t)$ ในกรณีที่ทำการปรับเปลี่ยนค่าสติฟเนสของสปริงให้มีค่า $\bar{K} = 100$ และเมื่อนำเส้นกราฟมาเปรียบเทียบกับเส้นกราฟกรณีอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) ปรากฏว่าเส้นกราฟที่ได้มีค่าที่ใกล้เคียงกันและจากการทดสอบตัวอย่างแผ่นโพลีคาร์โบเนต (Polycarbonate Sheet) ที่มีค่าสติฟเนสของสปริง $\bar{K} = 2.15$ เมื่อนำผลของมุมที่ได้จากโปรแกรม AutoCAD มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณพบว่าคำตอบที่ได้มีค่าที่ใกล้เคียงกัน

5.4 ข้อเสนอแนะของการทำวิจัยต่อไปในอนาคต

5.4.1 งานวิจัยนี้นำเสนอการศึกษาผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุดกระทำ ณ ตำแหน่งใด ๆ และมีจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงของอิลาสติกคา ณ ตำแหน่งใด ๆ โดยที่ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาถูกรองรับด้วยจุดรองรับที่หมุนได้อย่างอิสระ ส่วนที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางพาดอยู่บนจุดรองรับที่เลื่อนได้โดยไร้แรงเสียดทาน ซึ่งในขั้นตอนของการทดสอบตัวอย่างกับพบว่าความจริงแล้วจุดรองรับที่เลื่อนได้โดยไร้แรงเสียดทานนั้น ควรที่จะทำการปรับปรุงให้มีแรงเสียดทานเพิ่มเข้ามาเพื่อให้ปัญหาที่เกิดขึ้นสอดคล้องกับความเป็นจริงมากขึ้น

5.4.2 การศึกษาต่อจากงานวิจัยนี้ อาจพิจารณาคุณลักษณะของสปริงหมุนที่มีลักษณะพิเศษอื่น ๆ เช่น รูปแบบเชิงเส้นคู่ (Bilinear) และอาจพิจารณาผลของความเป็นพลาสติกที่จุดหมุนเพิ่มเติมได้

บรรณานุกรม

[1] สุรพันธ์ บุญเจริญ. (2536). **การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายเลื่อนได้อย่างอิสระโดยวิธีอิลิปติคอินทิกรัล.** (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้า-ธนบุรี).

[2] S. Chucheepsakul, S. Buncharoen, and C. M. Wang, “Large deflection of beams under moment gradient,” Journal of The Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 120, No. 9, pp. 1848-1860, 1994.

[3] S. Chucheepsakul, S. Buncharoen, and T. Huang, “Elastica of simple variable - arc - length beam subjected to end moment,” Journal of The Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 121, No. 7, pp. 767-772, 1995.

[4] จีระพงษ์ เทพพิทักษ์. (2538). **การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบต่าง ๆ.** (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).

[5] C. M. Wang, K. Y. Lam, X. Q. He, and S. Chucheepsakul, “Large deflection of an end supported beam subjected to a point load,” International Journal of Non - Linear Mechanics, Vol. 32, No. 1, pp. 63-72, 1997.

[6] ทินกร มนต์ประภัสสร. (2540). **การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยคำนึงถึงผลของการยึดรั้ง และความเสียดทานของที่รองรับ และผลของแรงเฉือน.** (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).

[7] S. Chucheepsakul, C. M. Wang, X. Q. He, and T. Monprapusson, “Double curvature bending of variable - arc - length elasticas,” Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 66, No. 1, pp. 87-94, 1999.

[8] บุญชัย ผึ้งไผ่งาม. (2544). **การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบเอียงที่เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูป.** (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).

[9] กอปร์ชัย ศิริตระกูลมั่งคั่ง. (2545). **การหาคำตอบทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้ระบบพิกัดลากรานจ์.** (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).

[10] นฤพนธ์ ศิลาภากุล. (2548). **การแอ่นตัวมากของคานที่ทาจากวัสดุแบบไม่เชิงเส้น.** (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).

บรรณานุกรม (ต่อ)

[11] B. Phungpaingam, S. Chucheepsakul, and C. M. Wang, “Postbuckling of beam subjected to intermediate follower force,” Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 132, No. 1, pp. 16-25, 2006.

[12] T. Pulngern, M. W. Halling, S. Chucheepsakul, and P. Poovarodom, “On the free vibrations of variable - arc - length beam : Analytical and Experimental,” Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 132, No. 5, pp. 772-778, 2006.

[13] C. Athisakul, and S. Chuchepsakul, “Effect of inclination on bending of variable - arc - length beam subjected to uniform self - weight,” Engineering Structures, Vol. 30, No. 4, pp. 902-908, 2008.

[14] กฤษณะชัย จันทรกอง. (2554). **การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่ทำจากวัสดุแบบไม่เป็นเชิง-เส้นภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบต่าง ๆ.** (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).

[15] สุนทร เกียรติคงศักดิ์. (2548). **พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของคานอย่างง่ายใต้สภาพการยึดรั้งที่ปลาย.** (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).

[16] ณัฐฏ์ พิชัยยุทธ์. (2557). **พฤติกรรมการโก่งเดาะของอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีจุดหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงความยาวของอิลาสติคคา.** (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี).

[17] B. Phungpaingam, and S. Chucheepsakul, “Postbuckling behavior of variable - arc - length elastica connected with a rotational spring joint including the effect of configurational force,” Meccanica, Vol. 53, No. 10, pp. 2619-2636, 2018.

[18] ปราโมทย์ เดชะอำไพ และนิพนธ์ วรรณโสภาคย์. (2557). **ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม.** (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[19] วรสิทธิ์ กาญจนกิจเกษม. (2557). **ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[20] อำพล ธรรมเจริญ. (2551). **วิธีการคำนวณและการวิเคราะห์เชิงตัวเลข.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์.

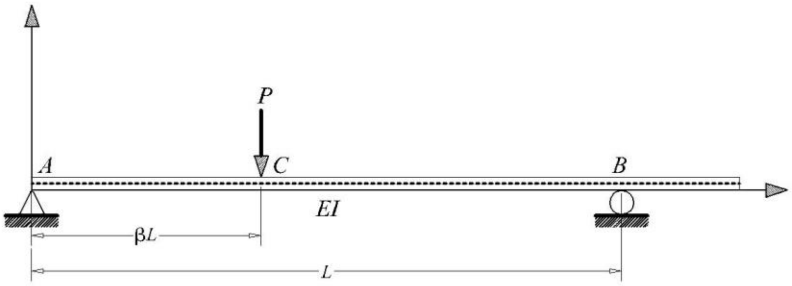
[21] ธนาวุฒิ ประกอบผล. (2555). **ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข.** กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ท๊อป จำกัด.

ภาคผนวก

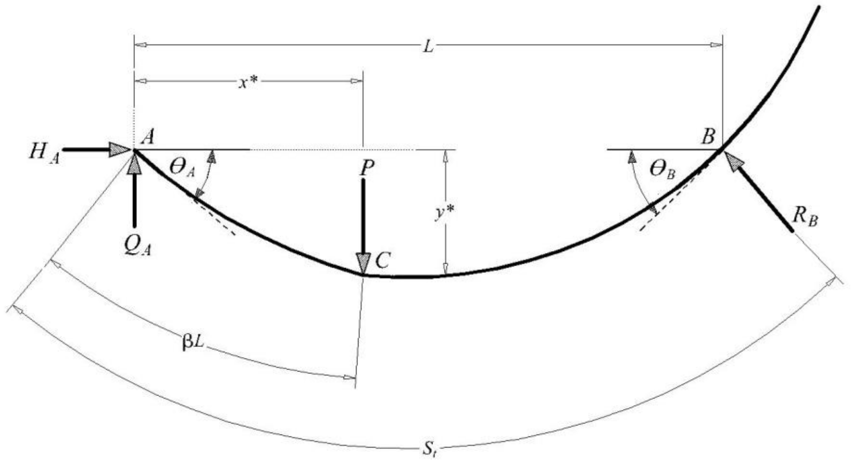
ภาคผนวก ก

แบบจำลองของอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica)

แบบจำลองของอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica)



รูปที่ ก.1 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะก่อนการเสียรูปของอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica)



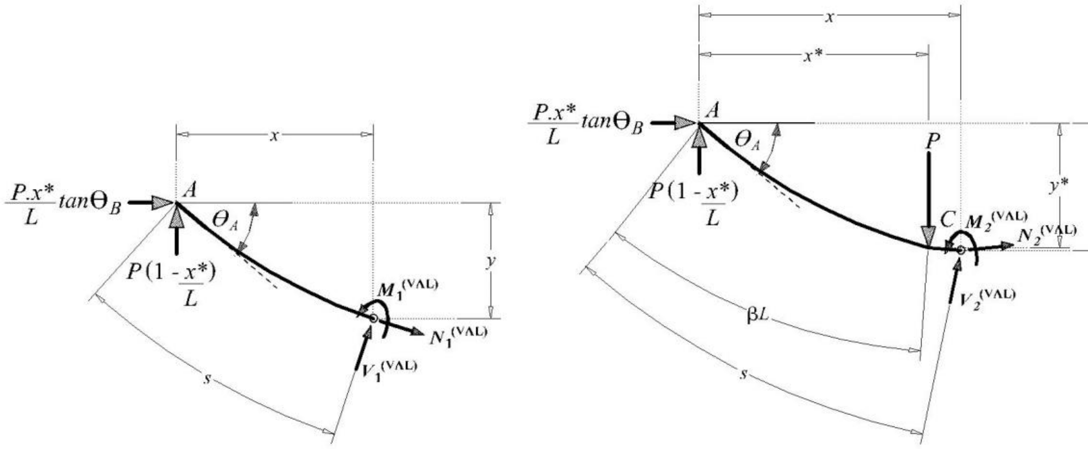
รูปที่ ก.2 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะหลังการเสียรูปของอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica)

จากรูปที่ ก.1 และ ก.2 ใช้สมการสภาวะสมดุลคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับได้ ดังนี้

$$R_B = \frac{P.x^*}{L\cos\theta_B} \tag{ก.1}$$

$$H_A = \frac{P.x^*}{L} \;.\; \tan\theta_B \tag{ก.2}$$

$$Q_A = P\left(1 - \frac{x^*}{L}\right) \tag{ก.3}$$



(ก) (ข)

รูปที่ ก.3 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Elastica) (ก) ในช่วงพิจารณาที่ $0 \leq s \leq \beta L$ และ (ข) ในช่วงพิจารณาที่ $\beta L \leq s \leq S_t$

พิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาจากรูปที่ ก.3 (ก) สามารถเขียนสมการสมดุลของโมเมนต์ดัดในช่วง AC หรือ $M_1^{(VAL)}$ ได้ดังนี้

$$M_1^{(VAL)} = \left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.y\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).x\right) \qquad (ก.4)$$

จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับความโค้งของอิลาสติกคาและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตในสมการที่ (2.1) เมื่อนำสมการที่ (ก.4) แทนค่าลงไปจะได้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_1^{(VAL)}}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.y\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).x\right)\right] \qquad (ก.5)$$

ดังนั้น จะได้สมการที่ (ก.5) (2.6ก) และ (2.6ข) เป็นสมการครอบคลุมปัญหา (Governing Equation) ซึ่งสามารถเขียนสมการที่ (ก.5) ในช่วงพิจารณาที่ $0 \leq s \leq \beta L$ ให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \left[\bar{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.\bar{y} + \bar{P}.(1-\overline{x^*}).\bar{x}\right] \qquad (ก.6)$$

พิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาจากรูปที่ ก.3 (ข) สามารถเขียนสมการสมดุลของโมเมนต์ดัดในช่วง CB หรือ $M_2^{(VAL)}$ ได้ดังนี้

$$M_2^{(VAL)} = \left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.(y-y^*)\right) + \left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).(x-x^*)\right) + K\Delta\theta \qquad (ก.7)$$

จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับความโค้งของอิลาสติกคาและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตใน สมการที่ (2.1) เมื่อนำสมการที่ (ก.7) แทนค่าลงไปจะได้

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{M_2^{(VAL)}}{EI}=\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{P.x^*}{L}.\tan\theta_B.(y-y^*)\right)+\left(\left(P\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\right).(x-x^*)\right)+K\Delta\theta\right] \quad (ก.8)$$

ดังนั้น จะได้สมการที่ (ก.8) (3.7ข) และ (3.7ค) เป็นสมการครอบคลุมปัญหา (Governing Equation) ซึ่งสามารถเขียนสมการที่ (ก.8) ในช่วงพิจารณาที่ $\beta L \le s \le S_t$ ให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}}=\left[\overline{P}.\overline{x^*}.\tan\theta_B.(\bar{y}-\overline{y^*})+\overline{P}.(1-\overline{x^*}).(\bar{x}-\overline{x^*})-\overline{P}(\bar{x}-\overline{x^*})+\bar{K}\Delta\theta\right] \quad (ก.9)$$

สมการที่ (3.7ข, 3.7ค, ก.6 และ ก.7) เป็นสมการอนุพันธ์ที่ใช้ในการอธิบายชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคา ดังนั้น หากต้องการพฤติกรรมทั้งหมดต้องทำการอินทิเกรทให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา (Boundary Condition) ดังนี้

$$\bar{x}(0)=0 \quad ; \quad \bar{x}(\bar{S}_t)=1 \quad (ก.10\ ก)$$

$$\bar{y}(0)=0 \quad ; \quad \bar{y}(\bar{S}_t)=0 \quad (ก.10\ ข)$$

$$\theta(\bar{S}_t=0)=\theta_A \quad ; \quad \theta(\bar{S}_t=1)=\theta_B \quad (ก.10\ ค)$$

$$\overline{x^*}=\overline{x^*}_s \quad (ก.10\ ง)$$

ภาคผนวก ข
ระเบียบวิธีรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta method)

ระเบียบวิธีรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta method)

ระเบียบวิธีรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta method) จัดได้ว่าเป็นระเบียบที่ได้รับความนิยมและใช้กันอย่างกว้างขวางโดยเฉพาะในการคำนวณที่ต้องการผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง รวมถึงในการคำนวณหาผลลัพธ์ในงานวิจัยนี้ด้วย โดยแนวความคิดที่ใช้ในระเบียบวิธีรุงเง - คุตตานี้คือ การหาค่าความชันที่มีความเที่ยงตรงสูงเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงตามมา สมการหลักที่ใช้ในการคำนวณผลลัพธ์ในระเบียบวิธีรุงเง - คุตตานั้น อยู่ในรูปแบบตามสมการ ข.1

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \tag{ข.1}$$

โดยที่ $\phi(x_i, y_i, h)$ เรียกว่า ฟังก์ชั่นส่วนเพิ่ม (Increment Function) ซึ่งมีความหมายถึงความชันเฉลี่ยตลอดขนาดช่องกว้าง h ที่จะนำไปใช้ในการคำนวณหาส่วนที่เพิ่มจากผลลัพธ์เดิม ฟังก์ชั่นส่วนเพิ่มนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไป ดังนี้

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + ... + a_nk_n \tag{ข.2}$$

โดย $a_i, i = 1, 2, 3, ..., n$ เป็นค่าคงที่ และ

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{ข.3ก}$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \tag{ข.3ข}$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \tag{ข.3ค}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + ... + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h) \tag{ข.3 n}$$

โดยตัวห้อย n บ่งบอกถึงอันดับที่ของระเบียบวิธีรุงเง - คุตตาที่เลือกใช้ เช่น เมื่อ $n = 1$ จะเรียกว่าเป็นระเบียบวิธีรุงเง - คุตตาอันดับที่หนึ่ง ในทำนองเดียวกันเมื่อเลือกใช้ $n = 2$ จะเรียกว่าเป็นระเบียบวิธีรุงเง - คุตตาอันดับที่สอง เป็นต้น ค่าของ $k_i, i = 1, 2, 3, ..., n$ ในสมการ (ข.3) ขึ้นอยู่กับฟังก์ชั่นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่กำหนดมาให้ ในส่วนของค่า p และ q ต่างๆนั้นเป็นค่าคงที่ และหากพิจารณาสมการ (ข.3) พบว่าจำเป็นต้องรู้ค่า k_1 ก่อนทำการคำนวณค่า k_2 และต้องรู้ค่า k_2 ก่อนทำการคำนวณค่า k_3 เช่นนี้เรื่อยไป สำหรับรายละเอียดของระเบียบวิธีรุงเง - คุตตาสามารถศึกษาได้จาก [18]

ภาคผนวก ค
ระเบียบวิธีนิวตัน - ราฟสัน

ระเบียบวิธีนิวตัน - ราฟสัน

ระบบสมการแบบไร้เชิงเส้นจำนวน n สมการ และ n ตัวแปร คือ $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ มีรูปแบบสมการดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&F_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) = 0 \\
&F_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) = 0 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&F_n(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) = 0
\end{aligned}
\qquad (ค.1)
$$

โดยการใช้ทฤษฎีการกระจายอนุกรมของเทเลอร์ (Taylor Series) กับฟังก์ชันไร้เชิงเส้นจำนวน n สมการ สามารถจัดรูปได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n
\end{bmatrix}
= -
\begin{bmatrix}
F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n
\end{bmatrix}
\qquad (ค.2)
$$

จากสมการ (ค.2) สามารถจัดรูปแบบสมการได้อีกแบบหนึ่ง คือ

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \Delta x_j = -F_i \qquad \text{เมื่อ } i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n \qquad (ค.3)$$

หรืออีกรูปแบบหนึ่ง คือ

$$[J][\Delta x] = -[F] \qquad (ค.4)$$

โดยที่เมตริกซ์ J คือ จาโคเบียนเมติกซ์ (Jacobian Matrix) มีค่าตามสมการต่อไปนี้

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \qquad \text{เมื่อ } i \text{ และ } j = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n \qquad (ค.5)$$

จากสมการที่ (ค.2) ถึง (ค.4) เป็นสมการที่มีเป้าหมายในการหาค่าของ Δx_j เพื่อเป็นค่าปรับแก้ของค่าเดิม x_{old} โดยมีขั้นตอนในการหาค่าปรับแก้ Δx_j ดังต่อไปนี้

1. สมมติค่าเริ่มต้นของตัวแปร $x_1, x_2, ..., x_n$
2. ทำการหาค่าของ $F_1, F_2, ..., F_n$ และค่าของ J_{ij} จากสมการ (ค.5)
3. ทำการหาค่า $[\Delta x]$ โดยใช้กระบวนการกำจัดแบบเกาส์ จากสมการที่ (ค.4)
4. จากขั้นตอนที่ 3 จะได้ค่าปรับแก้ $[\Delta x]$ ซึ่งเมื่อนำไปรวมกับค่าเดิมจะได้ค่าใหม่ ดังสมการต่อไปนี้

$$[x_{new}]^{K+1} = [x_{old}]^K + [\Delta x]^k \tag{ค.6}$$

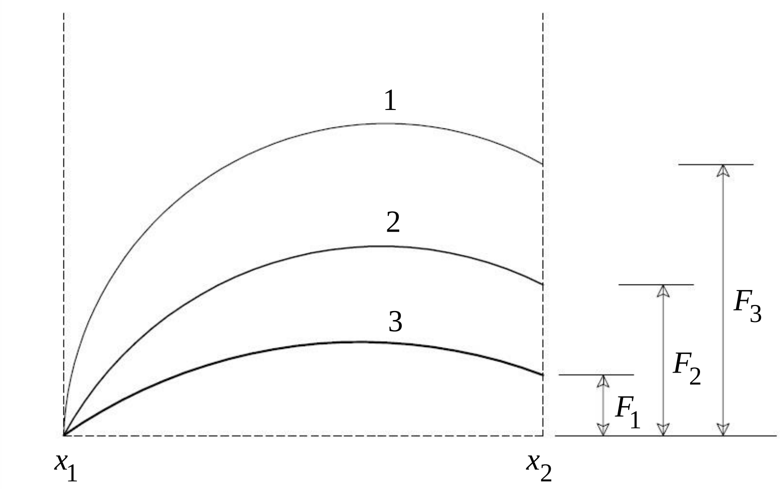
โดยที่ค่า K คือ ค่าที่บ่งบอกถึงจำนวนของการกระทำซ้ำ

5. จากนั้นให้ทำการตรวจสอบค่าของ $[F]$ ว่ามีค่าที่เข้าใกล้ศูนย์หรือไม่ ถ้ายังไม่เข้าใกล้ศูนย์ให้หาค่าปรับแก้ใหม่โดยอาศัยสมการ (ค.4) เช่นเดิม ทำเช่นนี้จนกว่าค่า $[F]$ จะมีค่าที่เข้าใกล้ศูนย์จึงจะหยุดกระบวนการได้ รายละเอียดของระเบียบวิธีนิวตัน - ราฟสันสามารถศึกษาได้จาก [18]

ภาคผนวก ง
ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method)

ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method)

วิธีการนี้ เป็นวิธีการเชิงตัวเลขวิธีการหนึ่งซึ่งสามารถจัดการกับปัญหาของระบบสมการอนุพันธ์ที่ขึ้นกับตัวแปร 1 ตัว โดยมีเงื่อนไขแบบ 2 จุด (จุดเริ่มต้น x_1 และจุดปลาย x_2) ได้เป็นอย่างดี โดยมีหลักการคือ พยายามปรับแก้ค่าที่ทำการประมาณจนกระทั่งค่าเหล่านั้นสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 2 จุด ตามรูปที่ ง.1 โดยที่วิธีการปรับแก้ที่ใช้คือ วิธีการนิวตัน - ราฟสัน



รูปที่ ง.1 วิธีการยิงเป้า

กระบวนการในการแก้ไขปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้ามีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ที่จุดเริ่มต้น x_1 นี้จะมีค่าเริ่มต้นอยู่ N ค่า โดยค่าแต่ละค่าเหล่านี้จะอยู่ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่ x_1 อยู่ n_1 ค่า ดังนั้นจะเหลือค่าของพารามิเตอร์ที่จำเป็นต้องอาศัยการประมาณค่าอยู่ $n_1 = N - n_1$ ค่า ซึ่งจะเรียกพารามิเตอร์เหล่านี้ว่า เวกเตอร์ V มีขนาดเท่ากับ $n_1 x_1$ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการได้ดังนี้

$$y_i(x_1) = y_i(x_1, V_1, ..., V_{n_2}) \qquad i = 1, ..., N \qquad (ง.1)$$

2. อินทิเกรตระบบสมการอนุพันธ์จากจุด x_1 ไปจนถึงจุด x_2 โดยที่ ณ ตำแหน่ง x_2 นี้ให้ทำการหาค่าความแตกต่างของค่าที่อินทิเกรตได้กับเงื่อนไขขอบเขตที่ x_2 ซึ่งเรียกค่านี้ว่าเวกเตอร์ของค่าที่แตกต่าง (Discrepancy vector F) ซึ่งเวกเตอร์นี้มีขนาดเท่ากับ $n_2 x_1$ เช่นเดียวกับเวกเตอร์ V

3. ใช้กระบวนการของวิธีการนิวตัน - ราฟสัน เพื่อหาค่าของเวกเตอร์ V ที่ทำให้เวกเตอร์ F มีค่าเป็นศูนย์ โดยมีขั้นตอนการปรับแก้ดังนี้

$$V_{new} = V_{old} + \delta V \tag{ง.2}$$

$$J\delta V = -F \tag{ง.3}$$

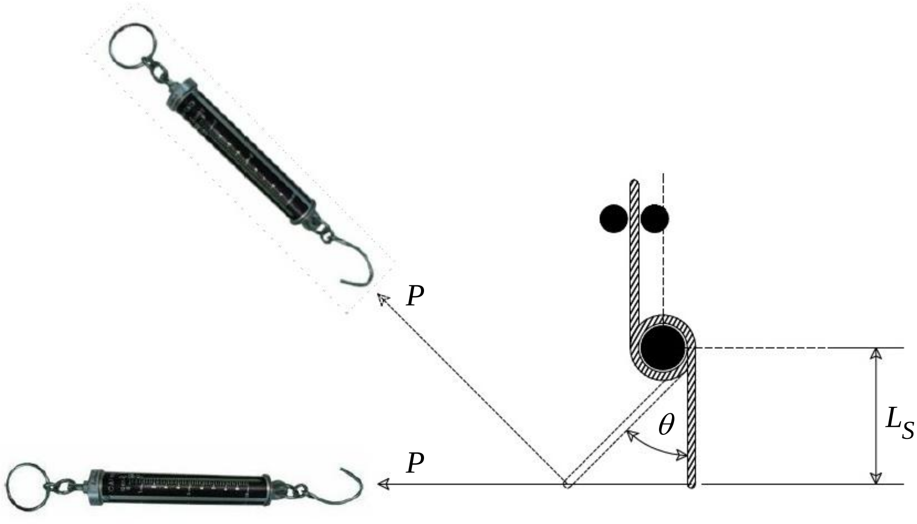
โดยที่ J คือ จาโคเบียนเมตริกซ์ (Jacobian Matrix) มีค่าเท่ากับ

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial V_j} \tag{ง.4}$$

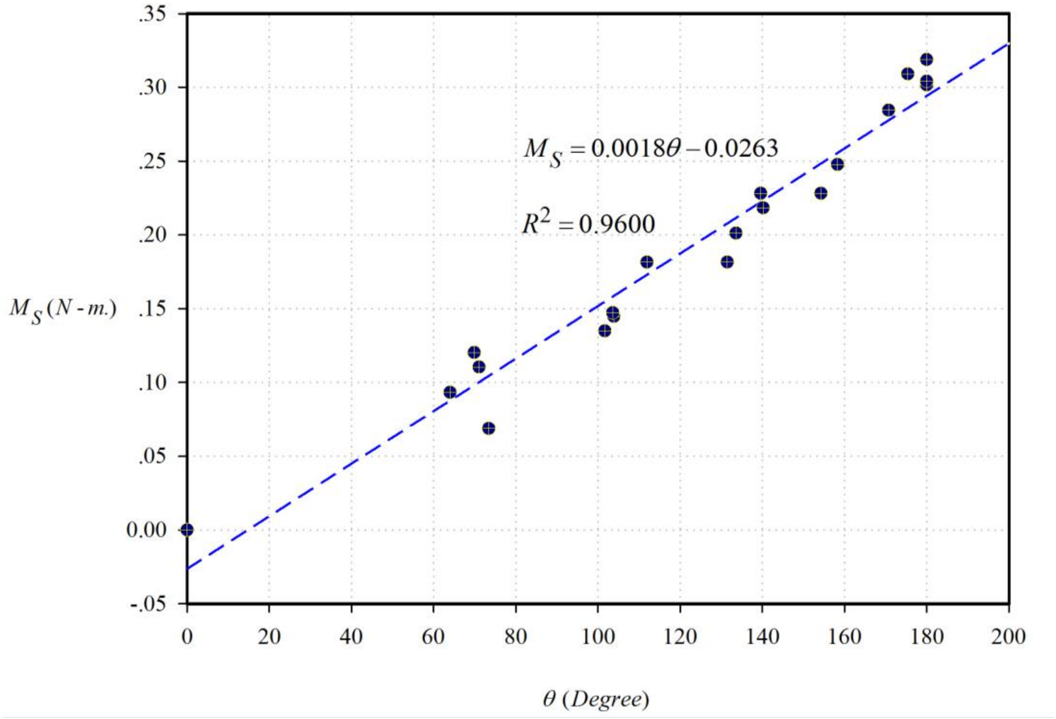
โดยค่าของเวกเตอร์ V ที่ทำให้ค่าเวกเตอร์มีค่าเท่ากับศูนย์ คือ ค่าของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 2 จุดนั่นเอง โดยที่รายละเอียดสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [18]

ภาคผนวก จ
การทดสอบหาค่าสติฟเนสของสปริง

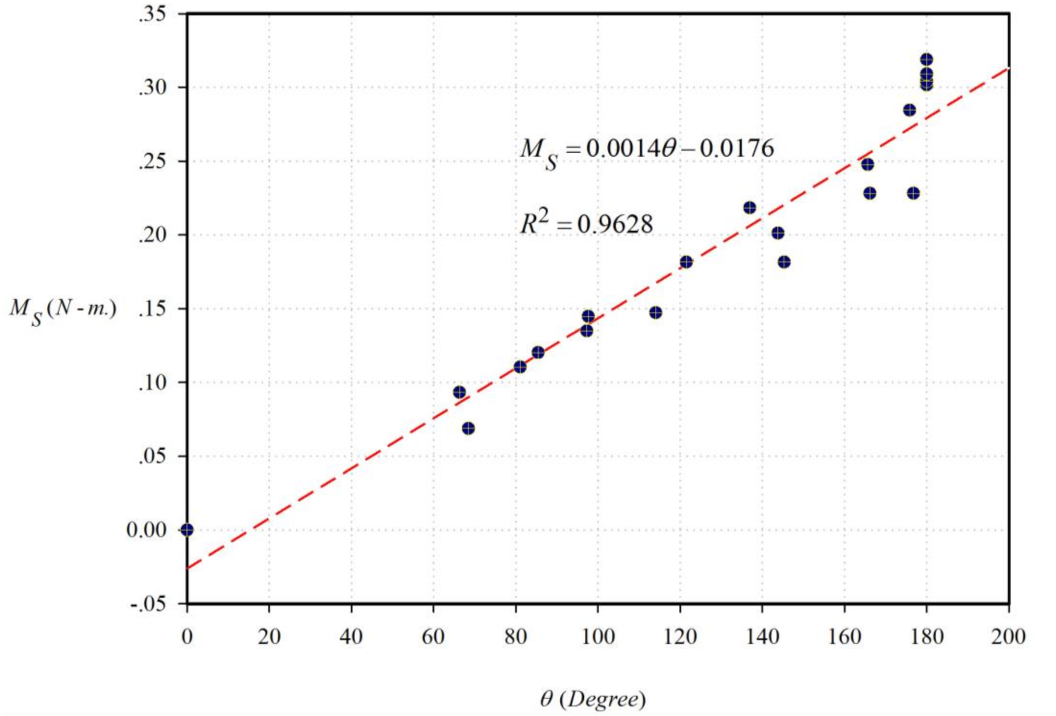
การทดสอบหาค่าสติฟเนสของสปริง



รูปที่ จ.1 แบบจำลองการทดสอบเพื่อหาค่าสติฟเนสของสปริง



รูปที่ จ.2 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับมุมของสปริง (กรณีหมุนตามเข็มนาฬิกา)



รูปที่ จ.3 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับมุมของสปริง (กรณีหมุนทวนเข็มนาฬิกา)

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าสติฟเนสของสปริง (K) และแรงกระทำที่ปลายของสปริง (P)

$$\bar{K} = \frac{KL}{EI} \tag{จ.1}$$

โดยที่

$\bar{K}$ คือ สติฟเนสของสปริงในรูปไร้หน่วย

K คือ ความชัน (Slope) จากความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัด และมุมของสปริง

L คือ ความยาวช่วงของอิลาสติกคา

E คือ โมดูลัสความยืดหยุ่นของแผ่นโพลีคาร์บอเนต

I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยพื้นที่ของแผ่นโพลีคาร์บอเนต

การคำนวณหาค่าสติฟเนทของสปริง

โดยที่ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของแผ่นโพลีคาร์บอเนต

$$E = 2.052\ Gpa. \tag{จ.2}$$

ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยพื้นที่ของโพลีคาร์บอเนต

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.05x0.002^3}{12} = 3.33x10^{-11}\ m.^4 \tag{จ.3}$$

ค่าความยาวของอิลาสติคคา

$$L = 1.60\ m. \qquad (\text{จ.}4)$$

จากรูปที่ (จ.2) และ (จ.3) จะได้ค่าสติฟเนสของสปริงตามเข็มนาฬิกา

$$\bar{K} = \frac{\left(\left(\frac{0.0018}{\left(\frac{\pi}{180}\right)}\right) x1.60\right)}{\left((2.052\,x10^{9})\,x\,(3.33x10^{-11})\right)} = 2.41 \qquad (\text{จ.}5)$$

และจะได้ค่าสติฟเนสของสปริงทวนเข็มนาฬิกา

$$\bar{K} = \frac{\left(\left(\frac{0.0014}{\left(\frac{\pi}{180}\right)}\right) x1.60\right)}{\left((2.052\,x10^{9})\,x\,(3.33x10^{-11})\right)} = 1.89 \qquad (\text{จ.}6)$$

ดังนั้น ค่าสติฟเนสของสปริงตัวอย่างจะมีค่าเท่ากับ

$$\bar{K} = \left(\frac{2.41+1.89}{2}\right) = 2.15 \qquad (\text{จ.}7)$$

ภาคผนวก ฉ
ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณ

1. ตัวอย่างคำสั่งสำหรับการคำนวณวิธียิงเป้า โดยใช้โปรแกรม MATLAB กรณีที่ระยะ $\alpha < \beta$

```
function dydx=goveqs1_valspringl(x,y)
global P xstar cetaB
dydx=zeros(3,1);
dydx(1)=(((P*xstar)*(tan(cetaB)))*y(3))+((P*(1-xstar))*y(2));   % dM/ds ---> M1 CASE I alpha
< beta
dydx(2)=cos(y(1));   % dx/ds ---> x
dydx(3)=sin(y(1));   % dy/ds ---> y
end

function dydx=goveqs2_valspringl(x,y)
global P xstar cetaB xc yc K dtheta
dydx=zeros(3,1);
dydx(1)=(((P*xstar)*(tan(cetaB)))*(y(3)-yc))+((P*(1-xstar))*(y(2)-xc))+(K*(dtheta));   % dM/ds
---> M2 CASE I alpha < beta
dydx(2)=cos(y(1));   % dx/ds ---> x
dydx(3)=sin(y(1));   % dy/ds ---> y
end

function dydx=goveqs3_valspringl(x,y)
global P xstar cetaB xc yc K dtheta
dydx=zeros(3,1);
dydx(1)=(((P*xstar)*(tan(cetaB)))*(y(3)-yc))+((P*(1-xstar))*(y(2)-xc))-(P*(y(2)-
xstar))+(K*(dtheta));   % dM/ds ---> M3 CASE I alpha < beta
dydx(2)=cos(y(1));   % dx/ds ---> x
dydx(3)=sin(y(1));    % dy/ds ---> y
end

function r=score_valspringl(v)
global cetaB beta alpha P cetaA xc yc xstar st dtheta pl K
r=zeros(7,1);
P=v(1);
cetaB=v(2);
xc=v(3);
yc=v(4);
```

```
xstar=v(5);
cetaA=v(6);
dtheta=v(7);

odeoptions=odeset('RelTol',1.0e-6,'AbsTol',1.0e-7);
[x1 y1]=ode45('goveqs1_valspringl',[0 alpha],[cetaA 0 0]);
lastrow1=size(y1,1);
xcs=y1(lastrow1,2); ycs=y1(lastrow1,3); ceta1=y1(lastrow1,1);

ceta2=ceta1+dtheta;
[x2 y2]=ode45('goveqs2_valspringl',[alpha beta],[ceta2 xcs ycs],odeoptions);
lastrow2=size(y2,1);
xss=y2(lastrow2,2); yss=y2(lastrow2,3); cetaP=y2(lastrow2,1);

[x3 y3]=ode45('goveqs3_valspringl',[beta st],[cetaP xss yss],odeoptions);
lastrow3=size(y3,1);

if (pl==1)
    figure(1)
    hold on;
    title ('Equilibrium shape');
    plot(y1(:,2),y1(:,3));
    plot(y2(:,2),y2(:,3));
    plot(y3(:,2),y3(:,3));
    axis on;
    axis equal;
    grid on;
end

r(1)=y3(lastrow3,2)-1;
r(2)=y3(lastrow3,3);
r(3)=y3(lastrow3,1)-cetaB;
r(4)=xc-xcs;
r(5)=yc-ycs;
r(6)=xstar-xss;
```

```
r(7)=((P*xstar*(tan(cetaB))*yc)+(P*(1-xstar)*xc))-(K*dtheta);
end

function valelastica_springI
%     "EFFECT OF ROTATIONAL SPRING JOINT ON LARGE DEFLECTIONS BEHAVIOR OF
%                  VARIABLE-ARC-LENGTH ELASTICA SUBJECTED TO POINT LOAD"
beep
clear
global st alpha beta K pl
format long
st=input('st = ');    % <--- The controlled parameter
alpha=input('position of spring joint (alpha) = ');
beta=input('position of point load (beta) = ');
K=input('stiffness of spring joint (K) = ');

v(1)=input('point load (P) = ');
v(2)=input('cetaB = ');
v(3)=input('xc = ');
v(4)=input('yc = ');
v(5)=input('xstar = ');
v(6)=input('cetaA = ');
v(7)=input('difference in angle at spring joint (dtheta) = ');

pl=input('Plot configuration shapes (yes (1), no (0)) = ');
lim=input('The limitation of shorthening which considered (limitation) = ');
inc=input('The increment of shorthening in each considered (increment) = ');
fid=fopen('output.txt','wt');
fprintf(fid,'output of Simple beam subjected to point load with in span-length of the beam elastica\n');
fprintf(fid,'     st                    P                    cetaB                    xc                    yc                    xstar                    cetaA                    dtheta                    test\n');
i=0;
dv=0.0001;

while (abs(st)<abs(lim))
```

```
      v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5) v(6) v(7)];
      options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',400,'TolFun',1e-15,'TolX',1.0e-15);
      [v fval]=fsolve('score_valspringl',v0,options)
      test=max(abs(fval));
while (test>1.0e-7&&i<25)
      i=i+1;
      v(1)=v(1)+dv; v(2)=v(2)+dv; v(3)=v(3)+dv; v(4)=v(4)+dv; v(5)=v(5)+dv; v(6)=v(6)+dv;
v(7)=v(7)+dv;
      v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5) v(6) v(7)];
      [v fval]=fsolve('score_valspringl',v0,options)
      test=max(abs(fval));
end

fprintf(fid,'%12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f
%12.9f          %12.9f          %12.9f\n',st,v(1),v(2),v(3),v(4),v(5),v(6),v(7),test);
st=st+inc
end

fclose(fid)
end
```

2. ตัวอย่างคำสั่งสำหรับการคำนวณวิธียิงเป้า โดยใช้โปรแกรม MATLAB กรณีที่ระยะ $\alpha = \beta$

```
function dydx=goveqs1_valspringII(x,y)
global P xstar cetaB
dydx=zeros(3,1);
dydx(1)=(((P*xstar)*(tan(cetaB)))*y(3))+((P*(1-xstar))*y(2));   % dM/ds ---> M1 CASE II alpha = beta
dydx(2)=cos(y(1));   % dx/ds ---> x
dydx(3)=sin(y(1));    % dy/ds ---> y
end

function dydx=goveqs2_valspringII(x,y)
global P xstar cetaB ystar K dtheta
dydx=zeros(3,1);
dydx(1)=(((P*xstar)*(tan(cetaB)))*(y(3)-ystar))+((P*(1-xstar))*(y(2)-xstar))-(P*(y(2)-xstar))+(K*(dtheta));   % dM/ds ---> M2 CASE II alpha = beta
dydx(2)=cos(y(1));   % dx/ds ---> x
dydx(3)=sin(y(1));   % dy/ds ---> y
end

function r=score_valspringII(v)
global cetaB beta P cetaA xstar ystar st dtheta pl K
r=zeros(6,1);
P=v(1);
cetaB=v(2);
xstar=v(3);
ystar=v(4);
cetaA=v(5);
dtheta=v(6);
odeoptions=odeset('RelTol',1.0e-6,'AbsTol',1.0e-7);
[x1 y1]=ode45('goveqs1_valspringII',[0 beta],[cetaA 0 0]);
lastrow1=size(y1,1);
xss=y1(lastrow1,2); yss=y1(lastrow1,3); ceta1=y1(lastrow1,1);

ceta2=ceta1+dtheta;
[x2 y2]=ode45('goveqs2_valspringII',[beta st],[ceta2 xss yss],odeoptions);
```

```
lastrow2=size(y2,1);

if (pl==1)
    figure(1)
    hold on;
    title ('Equilibrium shape');
    plot(y1(:,2),y1(:,3));
    plot(y2(:,2),y2(:,3));
    axis on;
    axis equal;
    grid on;
end

r(1)=y2(lastrow2,2)-1;
r(2)=y2(lastrow2,3);
r(3)=y2(lastrow2,1)-cetaB;
r(4)=xstar-xss;
r(5)=ystar-yss;
r(6)=((P*xstar*(tan(cetaB))*ystar)+(P*(1-xstar)*xstar))-(K*dtheta);
end

function valelastica_springII
%    "EFFECT OF ROTATIONAL SPRING JOINT ON LARGE DEFLECTIONS BEHAVIOR OF
%                  VARIABLE-ARC-LENGTH ELASTICA SUBJECTED TO POINT LOAD"
beep
clear
global st beta K pl
format long
st=input('st = ');          % <--- The controlled parameter
beta=input('position of spring joint and position of point load (beta) = ');
K=input('stiffness of spring joint (K) = ');

v(1)=input('point load (P) = ');
v(2)=input('cetaB = ');
v(3)=input('xstar = ');
```

```
v(4)=input('ystar = ');
v(5)=input('cetaA = ');
v(6)=input('difference in angle at spring joint (dtheta) = ');

pl=input('Plot configuration shapes (yes (1), no (0)) = ');
lim=input('The limitation of shorthening which considered (limitation) = ');
inc=input('The increment of shorthening in each considered (increment) = ');
fid=fopen('output.txt','wt');
fprintf(fid,'output of Simple beam subjected to point load with in span-length of the
beam elastica\n');
fprintf(fid,'    st              P              cetaB              xstar              ystar
cetaA              dtheta              test\n');
i=0;
dv=0.0001;

while (abs(st)<abs(lim))
    v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5) v(6)];
    options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',400,'TolFun',1e-15,'TolX',1.0e-15);
    [v fval]=fsolve('score_valspringII',v0,options)
    test=max(abs(fval));
while (test>1.0e-7&&i<25)
    i=i+1;
    v(1)=v(1)+dv; v(2)=v(2)+dv; v(3)=v(3)+dv; v(4)=v(4)+dv; v(5)=v(5)+dv; v(6)=v(6)+dv;
    v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5) v(6)];
    [v fval]=fsolve('score_valspringII',v0,options)
    test=max(abs(fval));
end

fprintf(fid,'%12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f
%12.9f          %12.9f\n',st,v(1),v(2),v(3),v(4),v(5),v(6),test);
st=st+inc
end

fclose(fid)
end
```

3. ตัวอย่างคำสั่งสำหรับการคำนวณวิธียิงเป้า โดยใช้โปรแกรม MATLAB กรณีที่ระยะ $\alpha > \beta$

```
function dydx=goveqs1_valspringIII(x,y)
global P xstar cetaB
dydx=zeros(3,1);
dydx(1)=(((P*xstar)*(tan(cetaB)))*y(3))+((P*(1-xstar))*y(2));   % dM/ds ---> M1 caseIII alpha
> beta
dydx(2)=cos(y(1));   % dx/ds ---> x
dydx(3)=sin(y(1));   % dy/ds ---> y
end

function dydx=goveqs2_valspringIII(x,y)
global P xstar cetaB
dydx=zeros(3,1);
dydx(1)=(((P*xstar)*(tan(cetaB)))*y(3))+((P*(1-xstar))*y(2))-(P*(y(2)-xstar));   % dM/ds --->
M2 caseIII alpha > beta
dydx(2)=cos(y(1));   % dx/ds ---> x
dydx(3)=sin(y(1));   % dy/ds ---> y
end

function dydx=goveqs3_valspringIII(x,y)
global P xstar cetaB xd yd K dtheta
dydx=zeros(3,1);
dydx(1)=(((P*xstar)*(tan(cetaB)))*(y(3)-yd))+((P*(1-xstar))*(y(2)-xd))-(P*(y(2)-
xd))+(K*(dtheta));   % dM/ds ---> M3 caseIII alpha > beta
dydx(2)=cos(y(1));   % dx/ds ---> x
dydx(3)=sin(y(1));   % dy/ds ---> y
end

function r=score_valspringIII(v)
global cetaB beta alpha P cetaA xd yd xstar st dtheta pl K
r=zeros(7,1);
P=v(1);
cetaB=v(2);
xd=v(3);
yd=v(4);
```

```
xstar=v(5);
cetaA=v(6);
dtheta=v(7);

odeoptions=odeset('RelTol',1.0e-6,'AbsTol',1.0e-7);
[x1 y1]=ode45('goveqs1_valspringIII',[0 beta],[cetaA 0 0]);
lastrow1=size(y1,1);
xss=y1(lastrow1,2); yss=y1(lastrow1,3); cetaP=y1(lastrow1,1);

[x2 y2]=ode45('goveqs2_valspringIII',[beta alpha],[cetaP xss yss],odeoptions);
lastrow2=size(y2,1);
xds=y2(lastrow2,2); yds=y2(lastrow2,3); ceta1=y2(lastrow2,1);

ceta2=ceta1+dtheta;
[x3 y3]=ode45('goveqs3_valspringIII',[alpha st],[ceta2 xds yds],odeoptions);
lastrow3=size(y3,1);

if (pl==1)
    figure(1)
    hold on;
    title ('Equilibrium shape');
    plot(y1(:,2),y1(:,3));
    plot(y2(:,2),y2(:,3));
    plot(y3(:,2),y3(:,3));
    axis on;
    axis equal;
    grid on;
end

r(1)=y3(lastrow3,2)-1;
r(2)=y3(lastrow3,3);
r(3)=y3(lastrow3,1)-cetaB;
r(4)=xd-xds;
r(5)=yd-yds;
r(6)=xstar-xss;
```

```
r(7)=((P*xstar*(tan(cetaB))*yd)+(P*(1-xstar)*xd)-(P*(xd-xstar)))-(K*dtheta);
end

function valelastica_springIII
%    "EFFECT OF ROTATIONAL SPRING JOINT ON LARGE DEFLECTIONS BEHAVIOR OF
%              VARIABLE-ARC-LENGTH ELASTICA SUBJECTED TO POINT LOAD"
beep
clear
global st alpha beta K pl
format long
st=input('st = ');         % <--- The controlled parameter
alpha=input('position of spring joint (alpha) = ');
beta=input('position of point load (beta) = ');
K=input('stiffness of spring joint (K) = ');

v(1)=input('point load (P) = ');
v(2)=input('cetaB = ');
v(3)=input('xd = ');
v(4)=input('yd = ');
v(5)=input('xstar = ');
v(6)=input('cetaA = ');
v(7)=input('difference in angle at spring joint (dtheta) = ');

pl=input('Plot configuration shapes (yes (1), no (0)) = ');
lim=input('The limitation of shorthening which considered (limitation) = ');
inc=input('The increment of shorthening in each considered (increment) = ');
fid=fopen('output.txt','wt');
fprintf(fid,'output of Simple beam subjected to point load with in span-length of the
beam elastica\n');
fprintf(fid,'    st                P                cetaB                xd                yd
xstar                cetaA                dtheta                test\n');
i=0;
dv=0.0001;

while (abs(st)<abs(lim))
```

```
      v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5) v(6) v(7)];
      options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',400,'TolFun',1e-15,'TolX',1.0e-15);
      [v fval]=fsolve('score_valspringIII',v0,options)
      test=max(abs(fval));
while (test>1.0e-7&&i<25)
      i=i+1;
      v(1)=v(1)+dv; v(2)=v(2)+dv; v(3)=v(3)+dv; v(4)=v(4)+dv; v(5)=v(5)+dv; v(6)=v(6)+dv;
v(7)=v(7)+dv;
      v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5) v(6) v(7)];
      [v fval]=fsolve('score_valspringIII',v0,options)
      test=max(abs(fval));
end

fprintf(fid,'%12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f
%12.9f          %12.9f          %12.9f\n',st,v(1),v(2),v(3),v(4),v(5),v(6),v(7),test);
st=st+inc
end

fclose(fid)
end
```

ภาคผนวก ช
ผลการคำนวณเชิงตัวเลข

ตารางที่ ช.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.35$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	2.000613	0.171795	0.235737	-0.083188	0.335729	-0.351841	0.303588
1.04	3.001155	0.240284	0.221293	-0.116250	0.321281	-0.501189	0.423296
1.06	3.915913	0.291305	0.206709	-0.140532	0.306681	-0.618075	0.510606
1.08	4.840850	0.333291	0.192033	-0.159984	0.291958	-0.718324	0.579918
1.10	5.826152	0.369639	0.177328	-0.176128	0.277150	-0.807885	0.636614
1.12	6.912912	0.402191	0.162670	-0.189737	0.262310	-0.889637	0.683196
1.14	8.143776	0.432124	0.148158	-0.201263	0.247503	-0.965100	0.720846
1.16	9.568333	0.460278	0.133914	-0.211002	0.232811	-1.035051	0.749988
1.18	11.246887	0.487274	0.120088	-0.219162	0.218333	-1.099791	0.770564
1.20	13.253158	0.513564	0.106857	-0.225908	0.204185	-1.159298	0.782203
1.22	15.675414	0.539412	0.094410	-0.231388	0.190487	-1.213345	0.784414
1.24	18.615259	0.564861	0.082934	-0.235750	0.177344	-1.261650	0.776810
1.26	22.184202	0.589711	0.072567	-0.239151	0.164826	-1.304039	0.759365
1.28	26.500062	0.613552	0.063375	-0.241759	0.152938	-1.340599	0.732594
1.30	31.686964	0.635870	0.055329	-0.243736	0.141621	-1.371746	0.697561
1.32	37.882233	0.656197	0.048323	-0.245232	0.130770	-1.398163	0.655715
1.34	45.251516	0.674226	0.042202	-0.246369	0.120258	-1.420664	0.608625
1.36	54.012808	0.689852	0.036808	-0.247242	0.109972	-1.440054	0.557761
1.38	64.472017	0.703153	0.031997	-0.247919	0.099827	-1.457027	0.504370
1.40	77.076877	0.714331	0.027653	-0.248448	0.089773	-1.472136	0.449445
1.42	92.504056	0.723649	0.023691	-0.248863	0.079789	-1.485790	0.393757
1.44	111.809899	0.731387	0.020051	-0.249187	0.069882	-1.498285	0.337904
1.46	136.711295	0.737808	0.016691	-0.249438	0.060074	-1.509830	0.282389
1.48	170.153024	0.743150	0.013585	-0.249628	0.050406	-1.520567	0.227702
1.50	217.565822	0.747617	0.010719	-0.249769	0.040933	-1.530595	0.174437
1.52	290.005200	0.751388	0.008089	-0.249869	0.031731	-1.539968	0.123490
1.54	413.308644	0.754622	0.005702	-0.249935	0.022922	-1.548692	0.076454
1.56	589.823375	0.757592	0.004142	-0.249521	0.016447	-1.554940	0.042439
1.58	587.207211	0.757569	0.004110	-0.249524	0.016525	-1.554876	0.042788
1.60	580.135418	0.757516	0.004154	-0.249523	0.016716	-1.554692	0.043726

ตารางที่ ช.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.35$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	4.464430	0.232938	0.239297	-0.072092	0.338435	-0.320743	0.068092
1.04	6.592986	0.323823	0.228588	-0.100860	0.326741	-0.454086	0.094173
1.06	8.455313	0.389687	0.217867	-0.122181	0.314912	-0.556850	0.112842
1.08	10.251548	0.441938	0.207132	-0.139512	0.302942	-0.643928	0.127514
1.10	12.067276	0.485076	0.196379	-0.154204	0.290827	-0.721078	0.139533
1.12	13.954884	0.521464	0.185611	-0.166950	0.278564	-0.791229	0.149580
1.14	15.954411	0.552549	0.174833	-0.178159	0.266153	-0.856091	0.158048
1.16	18.101622	0.579311	0.164055	-0.188096	0.253598	-0.916740	0.165169
1.18	20.432284	0.602467	0.153291	-0.196941	0.240907	-0.973881	0.171083
1.20	22.985228	0.622573	0.142564	-0.204825	0.228093	-1.027980	0.175863
1.22	25.805185	0.640077	0.131901	-0.211842	0.215173	-1.079344	0.179541
1.24	28.945937	0.655351	0.121333	-0.218068	0.202169	-1.128161	0.182112
1.26	32.474160	0.668712	0.110900	-0.223564	0.189109	-1.174532	0.183548
1.28	36.474418	0.680430	0.100644	-0.228381	0.176023	-1.218492	0.183799
1.30	41.055904	0.690739	0.090613	-0.232568	0.162947	-1.260026	0.182796
1.32	46.361884	0.699839	0.080859	-0.236167	0.149920	-1.299079	0.180458
1.34	52.583307	0.707904	0.071435	-0.239223	0.136985	-1.335569	0.176690
1.36	59.979175	0.715080	0.062397	-0.241779	0.124184	-1.369396	0.171390
1.38	68.908079	0.721491	0.053803	-0.243880	0.111565	-1.400457	0.164448
1.40	79.878994	0.727243	0.045707	-0.245572	0.099176	-1.428659	0.155758
1.42	93.636821	0.732422	0.038162	-0.246903	0.087064	-1.453936	0.145215
1.44	111.313929	0.737098	0.031217	-0.247921	0.075280	-1.476265	0.132736
1.46	134.715037	0.741332	0.024911	-0.248672	0.063872	-1.495689	0.118262
1.48	166.893015	0.745173	0.019280	-0.249204	0.052894	-1.512332	0.101789
1.50	213.421123	0.748664	0.014348	-0.249561	0.042403	-1.526409	0.083406
1.52	285.550250	0.751849	0.010133	-0.249783	0.032472	-1.538230	0.063384
1.54	409.364355	0.754777	0.006645	-0.249908	0.023206	-1.548169	0.042407
1.55	509.600947	0.756163	0.005175	-0.249945	0.018872	-1.552549	0.032007

ตารางที่ ช.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.35$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	5.012132	0.244250	0.240427	-0.068151	0.339094	-0.307891	0.007676
1.04	7.387473	0.338853	0.230816	-0.095545	0.328039	-0.435959	0.010642
1.06	9.457024	0.406906	0.221152	-0.116002	0.316821	-0.534808	0.012790
1.08	11.445671	0.460445	0.211425	-0.132773	0.305427	-0.618771	0.014506
1.10	13.448045	0.504234	0.201623	-0.147125	0.293849	-0.693397	0.015939
1.12	15.520114	0.540783	0.191742	-0.159702	0.282076	-0.761510	0.017166
1.14	17.702527	0.571641	0.181781	-0.170885	0.270106	-0.824760	0.018232
1.16	20.029551	0.597865	0.171742	-0.180916	0.257937	-0.884182	0.019161
1.18	22.533716	0.620241	0.161636	-0.189956	0.245576	-0.940456	0.019970
1.20	25.249086	0.639377	0.151478	-0.198121	0.233032	-0.994032	0.020666
1.22	28.214240	0.655773	0.141288	-0.205491	0.220321	-1.045210	0.021253
1.24	31.475504	0.669844	0.131093	-0.212132	0.207463	-1.094178	0.021731
1.26	35.090830	0.681940	0.120922	-0.218091	0.194484	-1.141049	0.022096
1.28	39.134780	0.692364	0.110811	-0.223409	0.181412	-1.185872	0.022345
1.30	43.705193	0.701371	0.100796	-0.228124	0.168280	-1.228651	0.022469
1.32	48.932562	0.709184	0.090920	-0.232268	0.155123	-1.269351	0.022459
1.34	54.993676	0.715991	0.081227	-0.235872	0.141982	-1.307901	0.022305
1.36	62.132200	0.721953	0.071768	-0.238968	0.128900	-1.344199	0.021991
1.38	70.690831	0.727209	0.062593	-0.241589	0.115921	-1.378117	0.021501
1.40	81.163435	0.731876	0.053763	-0.243768	0.103099	-1.409504	0.020813
1.42	94.283129	0.736056	0.045339	-0.245540	0.090488	-1.438190	0.019902
1.44	111.178353	0.739834	0.037391	-0.246942	0.078152	-1.464008	0.018737
1.46	133.666044	0.743284	0.029994	-0.248014	0.066160	-1.486805	0.017280
1.48	164.842078	0.746467	0.023229	-0.248798	0.054593	-1.506483	0.015490
1.50	210.380504	0.749439	0.017184	-0.249339	0.043545	-1.523044	0.013323
1.52	281.738420	0.752246	0.011949	-0.249681	0.033131	-1.536641	0.010740
1.54	405.378462	0.754932	0.007614	-0.249873	0.023499	-1.547621	0.007745
1.55	505.920822	0.756246	0.005810	-0.249927	0.019039	-1.552280	0.006126

ตารางที่ ช.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.50$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	2.302028	0.202054	0.236765	-0.080228	0.486655	-0.337551	0.261382
1.04	3.490893	0.285778	0.223701	-0.111566	0.473457	-0.477370	0.357007
1.06	4.609088	0.350401	0.210925	-0.134149	0.460440	-0.583742	0.420495
1.08	5.770569	0.405401	0.198566	-0.151833	0.447642	-0.671777	0.464590
1.10	7.038242	0.454380	0.186767	-0.166126	0.435102	-0.747011	0.494061
1.12	8.464435	0.499024	0.175664	-0.177822	0.422852	-0.812075	0.511266
1.14	10.100770	0.540104	0.165381	-0.187423	0.410904	-0.868442	0.517667
1.16	12.000049	0.577833	0.155997	-0.195305	0.399240	-0.917134	0.514467
1.18	14.213445	0.612074	0.147530	-0.201780	0.387799	-0.959091	0.502952
1.20	16.783605	0.642516	0.139919	-0.207135	0.376476	-0.995350	0.484653
1.22	19.735577	0.668866	0.133028	-0.211631	0.365139	-1.027091	0.461334
1.24	23.069975	0.691021	0.126678	-0.215497	0.353650	-1.055543	0.434821
1.26	26.763259	0.709152	0.120682	-0.218916	0.341897	-1.081819	0.406763
1.28	30.776103	0.723672	0.114886	-0.222017	0.329810	-1.106795	0.378435
1.30	35.065664	0.735133	0.109182	-0.224880	0.317360	-1.131060	0.350679
1.32	39.596410	0.744111	0.103507	-0.227551	0.304552	-1.154954	0.323955
1.34	44.346925	0.751129	0.097835	-0.230050	0.291410	-1.178633	0.298453
1.36	49.313156	0.756627	0.092159	-0.232384	0.277969	-1.202145	0.274193
1.38	54.509667	0.760956	0.086489	-0.234555	0.264265	-1.225469	0.251105
1.40	59.970546	0.764386	0.080840	-0.236563	0.250338	-1.248555	0.229081
1.42	65.750817	0.767124	0.075231	-0.238407	0.236225	-1.271339	0.208006
1.44	71.929137	0.769329	0.069683	-0.240089	0.221964	-1.293754	0.187776
1.46	78.612398	0.771118	0.064214	-0.241610	0.207589	-1.315736	0.168303
1.48	85.943036	0.772583	0.058845	-0.242974	0.193137	-1.337223	0.149526
1.50	94.110289	0.773794	0.053592	-0.244187	0.178644	-1.358162	0.131414
1.52	103.367472	0.774803	0.048472	-0.245255	0.164144	-1.378502	0.113964
1.54	114.058838	0.775654	0.043501	-0.246186	0.149678	-1.398201	0.097209
1.56	126.661881	0.776379	0.038692	-0.246987	0.135284	-1.417220	0.081218
1.58	141.856380	0.777005	0.034058	-0.247669	0.121008	-1.435523	0.066102
1.60	160.640920	0.777553	0.029612	-0.248240	0.106897	-1.453079	0.052012

ตารางที่ ช.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.50$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	4.205009	0.260122	0.241048	-0.066151	0.489485	-0.287731	0.048122
1.04	6.241777	0.362131	0.232262	-0.092297	0.478874	-0.404934	0.065098
1.06	8.058925	0.436243	0.223629	-0.111542	0.468146	-0.493648	0.076232
1.08	9.852360	0.495015	0.215136	-0.127116	0.457279	-0.567530	0.084118
1.10	11.710449	0.543326	0.206769	-0.140291	0.446251	-0.631926	0.089804
1.12	13.688854	0.583685	0.198511	-0.151735	0.435036	-0.689612	0.093845
1.14	15.827992	0.617598	0.190350	-0.161847	0.423610	-0.742254	0.096580
1.16	18.157946	0.646089	0.182271	-0.170891	0.411953	-0.790949	0.098234
1.18	20.699536	0.669926	0.174265	-0.179050	0.400044	-0.836458	0.098970
1.20	23.464438	0.689744	0.166324	-0.186455	0.387870	-0.879336	0.098913
1.22	26.455731	0.706106	0.158444	-0.193202	0.375422	-0.919993	0.098168
1.24	29.669469	0.719522	0.150626	-0.199367	0.362700	-0.958742	0.096824
1.26	33.097314	0.730461	0.142872	-0.205005	0.349709	-0.995822	0.094957
1.28	36.729785	0.739343	0.135187	-0.210163	0.336460	-1.031418	0.092638
1.30	40.559650	0.746538	0.127579	-0.214878	0.322966	-1.065674	0.089926
1.32	44.585007	0.752364	0.120056	-0.219182	0.309247	-1.098699	0.086870
1.34	48.811925	0.757086	0.112628	-0.223101	0.295321	-1.130578	0.083512
1.36	53.256709	0.760924	0.105307	-0.226659	0.281211	-1.161371	0.079885
1.38	57.948047	0.764053	0.098104	-0.229878	0.266940	-1.191119	0.076015
1.40	62.929288	0.766616	0.091034	-0.232778	0.252531	-1.219851	0.071921
1.42	68.261293	0.768726	0.084110	-0.235378	0.238009	-1.247582	0.067621
1.44	74.026233	0.770474	0.077346	-0.237694	0.223401	-1.274317	0.063128
1.46	80.333055	0.771931	0.070759	-0.239745	0.208732	-1.300054	0.058455
1.48	87.325263	0.773154	0.064362	-0.241547	0.194032	-1.324786	0.053618
1.50	95.192618	0.774189	0.058173	-0.243118	0.179330	-1.348503	0.048634
1.52	104.188578	0.775070	0.052205	-0.244474	0.164658	-1.371192	0.043528
1.54	114.657255	0.775830	0.046475	-0.245632	0.150050	-1.392844	0.038331
1.56	127.075695	0.776490	0.040996	-0.246608	0.135544	-1.413448	0.033086
1.58	142.122829	0.777072	0.035783	-0.247421	0.121180	-1.432999	0.027852
1.60	160.795739	0.777591	0.030848	-0.248087	0.107004	-1.451497	0.022705
1.62	184.615120	0.778063	0.026202	-0.248622	0.093068	-1.468945	0.017746

ตารางที่ ช.6 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.50$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	4.529858	0.268155	0.241998	-0.062558	0.489886	-0.274497	0.005211
1.04	6.710837	0.372392	0.234082	-0.087541	0.479623	-0.386839	0.007074
1.06	8.649632	0.447493	0.226233	-0.106119	0.469192	-0.472349	0.008320
1.08	10.557743	0.506520	0.218432	-0.121317	0.458568	-0.544036	0.009228
1.10	12.529095	0.554578	0.210662	-0.134322	0.447728	-0.606993	0.009909
1.12	14.620873	0.594319	0.202906	-0.145751	0.436650	-0.663855	0.010424
1.14	16.872359	0.627359	0.195149	-0.155970	0.425312	-0.716190	0.010807
1.16	19.310442	0.654815	0.187381	-0.165214	0.413694	-0.765017	0.011081
1.18	21.951322	0.677541	0.179595	-0.173643	0.401783	-0.811026	0.011261
1.20	24.801484	0.696248	0.171791	-0.181370	0.389572	-0.854703	0.011360
1.22	27.859230	0.711556	0.163972	-0.188473	0.377061	-0.896397	0.011386
1.24	31.117081	0.724016	0.156147	-0.195013	0.364256	-0.936360	0.011346
1.26	34.564871	0.734118	0.148327	-0.201035	0.351169	-0.974782	0.011246
1.28	38.193037	0.742288	0.140525	-0.206576	0.337815	-1.011804	0.011092
1.30	41.995697	0.748891	0.132756	-0.211665	0.324213	-1.047533	0.010888
1.32	45.973277	0.754232	0.125034	-0.216329	0.310385	-1.082053	0.010638
1.34	50.134726	0.758562	0.117376	-0.220591	0.296351	-1.115423	0.010346
1.36	54.499438	0.762084	0.109798	-0.224473	0.282137	-1.147688	0.010014
1.38	59.099153	0.764961	0.102316	-0.227994	0.267764	-1.178878	0.009643
1.40	63.980139	0.767324	0.094949	-0.231172	0.253257	-1.209008	0.009236
1.42	69.205963	0.769275	0.087714	-0.234025	0.238643	-1.238086	0.008793
1.44	74.861318	0.770896	0.080628	-0.236572	0.223946	-1.266108	0.008315
1.46	81.057479	0.772252	0.073712	-0.238828	0.209195	-1.293065	0.007803
1.48	87.940176	0.773395	0.066984	-0.240812	0.194418	-1.318941	0.007258
1.50	95.701289	0.774366	0.060463	-0.242541	0.179645	-1.343718	0.006681
1.52	104.596345	0.775199	0.054170	-0.244032	0.164909	-1.367375	0.006074
1.54	114.971488	0.775920	0.048124	-0.245303	0.150243	-1.389892	0.005439
1.56	127.305749	0.776551	0.042344	-0.246373	0.135687	-1.411252	0.004781
1.58	142.279946	0.777111	0.036850	-0.247259	0.121281	-1.431443	0.004106

ตารางที่ ช.7 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.75$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	2.803866	0.186874	0.244266	-0.053217	0.743564	-0.220930	0.154652
1.02	4.311598	0.270150	0.238933	-0.073537	0.737583	-0.307064	0.205577
1.03	5.818672	0.339036	0.234135	-0.087614	0.732132	-0.367657	0.233306
1.04	7.533357	0.402220	0.230054	-0.097826	0.727309	-0.412041	0.244576
1.05	9.664279	0.463254	0.226927	-0.104877	0.723228	-0.442652	0.240826
1.06	12.523079	0.523770	0.225025	-0.108903	0.719996	-0.459579	0.221907
1.07	16.620967	0.583639	0.224546	-0.109892	0.717626	-0.462478	0.188277
1.08	22.769780	0.640423	0.225381	-0.108176	0.715903	-0.452940	0.143875
1.09	32.185767	0.689970	0.226961	-0.104823	0.714390	-0.436174	0.097239
1.10	46.645778	0.728722	0.228560	-0.101293	0.712671	-0.419099	0.057599
1.11	68.538652	0.755408	0.229690	-0.098704	0.710544	-0.406775	0.029914
1.12	100.727797	0.771390	0.230222	-0.097457	0.707986	-0.400808	0.013714

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ตารางที่ ช.8 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.75$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	4.317540	0.230177	0.246550	-0.041332	0.745127	-0.176036	0.024015
1.02	6.496140	0.325750	0.243315	-0.057353	0.740489	-0.244511	0.031700
1.03	8.545866	0.399368	0.240319	-0.068817	0.736087	-0.293526	0.035931
1.04	10.725983	0.461781	0.237595	-0.077697	0.731928	-0.331353	0.037960
1.05	13.232998	0.517179	0.235184	-0.084716	0.728027	-0.360955	0.038219
1.06	16.313520	0.567688	0.233143	-0.090187	0.724405	-0.383543	0.036852
1.07	20.354641	0.614449	0.231544	-0.094227	0.721092	-0.399475	0.033869
1.08	26.030844	0.657842	0.230469	-0.096839	0.718114	-0.408670	0.029245
1.09	34.556167	0.697269	0.229974	-0.098021	0.715467	-0.411146	0.023123
1.10	47.974596	0.730788	0.229994	-0.097985	0.713052	-0.408132	0.016171
1.11	69.080168	0.755779	0.230256	-0.097374	0.710640	-0.403031	0.009747
1.12	100.888629	0.771433	0.230417	-0.096993	0.708004	-0.399767	0.005057

ตารางที่ ช.9 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.75$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	4.522093	0.234983	0.246923	-0.039032	0.745308	-0.167239	0.002529
1.02	6.790684	0.331819	0.244007	-0.054325	0.740816	-0.232825	0.003353
1.03	8.914668	0.405894	0.241269	-0.065399	0.736524	-0.280246	0.003822
1.04	11.162505	0.468248	0.238734	-0.074110	0.732436	-0.317360	0.004066
1.05	13.733025	0.523182	0.236436	-0.081143	0.728564	-0.347008	0.004131
1.06	16.870758	0.572884	0.234420	-0.086801	0.724927	-0.370380	0.004031
1.07	20.954198	0.618551	0.232748	-0.091200	0.721552	-0.387857	0.003766
1.08	26.637773	0.660657	0.231497	-0.094346	0.718470	-0.399349	0.003328
1.09	35.101689	0.698808	0.230737	-0.096205	0.715694	-0.404690	0.002719
1.10	48.368012	0.731374	0.230462	-0.096875	0.713159	-0.404532	0.001987
1.11	69.284721	0.755917	0.230489	-0.096819	0.710676	-0.401486	0.001262
1.12	100.963377	0.771453	0.230515	-0.096760	0.708012	-0.399246	0.000692

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ตารางที่ ช.10 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$
โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.85$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	4.843359	0.215006	0.244716	-0.051110	0.843167	-0.211698	0.140306
1.02	8.386876	0.325886	0.240605	-0.067874	0.837512	-0.281769	0.166777
1.03	13.855028	0.436011	0.238613	-0.074579	0.833725	-0.308861	0.148322
1.04	25.401200	0.557493	0.239771	-0.070777	0.832580	-0.290304	0.086443
1.05	59.392008	0.682086	0.242905	-0.059135	0.833810	-0.239417	0.019307

ตารางที่ ช.11 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$
โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.85$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	7.078158	0.259568	0.246903	-0.039183	0.844489	-0.166009	0.020958
1.02	11.597277	0.375617	0.244332	-0.052881	0.839731	-0.223297	0.025106
1.03	17.483143	0.474363	0.242508	-0.060706	0.835946	-0.254733	0.024000
1.04	28.095021	0.572577	0.241873	-0.063209	0.833640	-0.262191	0.017619
1.05	59.897201	0.682936	0.243159	-0.058082	0.833883	-0.236353	0.005934

ตารางที่ ช.12 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$
โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.85$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	7.364860	0.264320	0.247230	-0.037059	0.844640	-0.157855	0.002205
1.02	12.013327	0.380940	0.244869	-0.050333	0.839978	-0.213523	0.002673
1.03	17.991227	0.478907	0.243096	-0.058300	0.836213	-0.245625	0.002609
1.04	28.597115	0.575142	0.242298	-0.061553	0.833819	-0.256223	0.002000
1.05	60.072422	0.683228	0.243255	-0.057680	0.833908	-0.235194	0.000750

ตารางที่ ช.13 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.60$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	1.491199	0.228857	0.489884	-0.099529	0.588888	-0.223554	0.279964
1.04	2.218115	0.317661	0.479415	-0.141269	0.577637	-0.318405	0.389627
1.06	2.867684	0.382092	0.468600	-0.173559	0.566229	-0.392691	0.469654
1.08	3.508579	0.433564	0.457446	-0.200931	0.554651	-0.456539	0.533761
1.10	4.172768	0.476619	0.445965	-0.225115	0.542893	-0.513823	0.587327
1.12	4.882691	0.513640	0.434167	-0.246984	0.530950	-0.566497	0.633119
1.14	5.658576	0.546077	0.422066	-0.267043	0.518820	-0.615691	0.672758
1.16	6.521711	0.574889	0.409677	-0.285613	0.506505	-0.662116	0.707263
1.18	7.496711	0.600754	0.397020	-0.302908	0.494011	-0.706238	0.737286
1.20	8.613752	0.624170	0.384118	-0.319077	0.481349	-0.748364	0.763229
1.22	9.911286	0.645512	0.370998	-0.334225	0.468534	-0.788691	0.785303
1.24	11.439665	0.665066	0.357695	-0.348426	0.455587	-0.827332	0.803549
1.26	13.266040	0.683042	0.344251	-0.361731	0.442537	-0.864329	0.817848
1.28	15.480665	0.699582	0.330720	-0.374174	0.429418	-0.899664	0.827916
1.30	18.203721	0.714754	0.317168	-0.385776	0.416273	-0.933273	0.833302
1.32	21.588843	0.728534	0.303673	-0.396548	0.403143	-0.965065	0.833418
1.34	25.813513	0.740798	0.290317	-0.406501	0.390062	-0.994983	0.827660
1.36	31.040987	0.751344	0.277171	-0.415655	0.377035	-1.023084	0.815676
1.38	37.350659	0.759985	0.264267	-0.424055	0.364020	-1.049624	0.797706
1.40	44.678391	0.766689	0.251587	-0.431772	0.350932	-1.075036	0.774750
1.42	52.831389	0.771647	0.239076	-0.438885	0.337679	-1.099794	0.748270
1.44	61.573414	0.775198	0.226675	-0.445467	0.324193	-1.124250	0.719666
1.46	70.706553	0.777706	0.214346	-0.451568	0.310443	-1.148590	0.689941
1.48	80.106693	0.779479	0.202077	-0.457222	0.296432	-1.172861	0.659661
1.50	89.724209	0.780742	0.189874	-0.462447	0.282181	-1.197034	0.629074

ตารางที่ ช.14 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.60$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	3.997452	0.276316	0.490380	-0.093810	0.590244	-0.249029	0.074047
1.04	6.002581	0.384618	0.480622	-0.132969	0.580426	-0.350366	0.102294
1.06	7.868035	0.463407	0.470729	-0.163149	0.570523	-0.426855	0.122470
1.08	9.806394	0.526022	0.460701	-0.188657	0.560510	-0.490232	0.138349
1.10	11.940438	0.577578	0.450536	-0.211159	0.550364	-0.545047	0.151451
1.12	14.375196	0.620604	0.440227	-0.231511	0.540061	-0.593641	0.162588
1.14	17.213871	0.656517	0.429760	-0.250227	0.529572	-0.637423	0.172251
1.16	20.557272	0.686193	0.419121	-0.267641	0.518864	-0.677352	0.180753
1.18	24.492946	0.710273	0.408288	-0.283984	0.507903	-0.714166	0.188286
1.20	29.077959	0.729345	0.397243	-0.299414	0.496658	-0.748489	0.194953
1.22	34.322926	0.744053	0.385973	-0.314036	0.485101	-0.780880	0.200793
1.24	40.186181	0.755107	0.374470	-0.327920	0.473216	-0.811837	0.205813
1.26	46.581427	0.763239	0.362736	-0.341112	0.460996	-0.841778	0.210009
1.28	53.393959	0.769129	0.350779	-0.353644	0.448441	-0.871035	0.213391
1.30	60.497651	0.773354	0.338610	-0.365541	0.435558	-0.899847	0.215985
1.32	67.768104	0.776374	0.326244	-0.376826	0.422358	-0.928378	0.217832
1.34	75.091578	0.778532	0.313694	-0.387520	0.408852	-0.956731	0.218985
1.36	82.371171	0.780080	0.300978	-0.397640	0.395055	-0.984962	0.219496

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ตารางที่ ช.15 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.60$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	4.753215	0.288097	0.490609	-0.091038	0.590555	-0.254301	0.008791
1.04	7.158587	0.400862	0.481161	-0.129054	0.581078	-0.356467	0.012154
1.06	9.423444	0.482553	0.471648	-0.158378	0.571533	-0.432752	0.014575
1.08	11.811508	0.546974	0.462053	-0.183203	0.561888	-0.495325	0.016506
1.10	14.481966	0.599362	0.452358	-0.205161	0.552105	-0.548948	0.018135
1.12	17.572478	0.642283	0.442537	-0.225098	0.542144	-0.596106	0.019562
1.14	21.212465	0.677192	0.432558	-0.243522	0.531962	-0.638330	0.020851
1.16	25.513775	0.705073	0.422387	-0.260762	0.521510	-0.676701	0.022039
1.18	30.549887	0.726772	0.411992	-0.277035	0.510749	-0.712070	0.023145
1.20	36.335730	0.743174	0.401346	-0.292477	0.499643	-0.745159	0.024174
1.22	42.821178	0.755230	0.390438	-0.307173	0.488173	-0.776578	0.025122
1.24	49.902414	0.763891	0.379265	-0.321171	0.476334	-0.806827	0.025982
1.26	57.443159	0.770013	0.367833	-0.334506	0.464130	-0.836294	0.026746
1.28	65.294814	0.774301	0.356154	-0.347202	0.451570	-0.865258	0.027412
1.30	73.310353	0.777292	0.344242	-0.359282	0.438668	-0.893912	0.027978
1.32	81.352791	0.779381	0.332109	-0.370765	0.425438	-0.922381	0.028447

ตารางที่ ช.16 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.75$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	1.601455	0.178522	0.495064	-0.069738	0.743579	-0.155516	0.188311
1.02	2.383927	0.251855	0.490064	-0.098713	0.737303	-0.220267	0.262256
1.03	3.090149	0.308026	0.485010	-0.120965	0.731177	-0.270075	0.315944
1.04	3.801864	0.355619	0.479913	-0.139698	0.725212	-0.312048	0.358313
1.05	4.567423	0.398144	0.474790	-0.156131	0.719428	-0.348860	0.392653
1.06	5.436491	0.437624	0.469666	-0.170858	0.713860	-0.381776	0.420366
1.07	6.480357	0.475597	0.464583	-0.184188	0.708572	-0.411380	0.441807
1.08	7.828062	0.513667	0.459618	-0.196235	0.703678	-0.437746	0.456290
1.09	9.777028	0.554303	0.454939	-0.206869	0.699438	-0.460191	0.461154
1.10	13.363227	0.603886	0.451094	-0.215207	0.696646	-0.475534	0.446538
1.11	34.703322	0.712197	0.454399	-0.208491	0.702650	-0.444657	0.299740
1.12	85.888910	0.766768	0.459968	-0.196020	0.706371	-0.406676	0.142771

ตารางที่ ช.17 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.75$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	3.882399	0.224410	0.495590	-0.064198	0.744980	-0.165344	0.044830
1.02	5.824319	0.317160	0.491238	-0.090545	0.740162	-0.231163	0.061531
1.03	7.634616	0.388422	0.486966	-0.110507	0.735551	-0.279473	0.072922
1.04	9.540270	0.448804	0.482801	-0.127031	0.731159	-0.317940	0.081157
1.05	11.707702	0.502518	0.478783	-0.141208	0.727009	-0.349309	0.086970
1.06	14.343581	0.551821	0.474971	-0.153531	0.723136	-0.374677	0.090587
1.07	17.778964	0.598117	0.471451	-0.164194	0.719596	-0.394258	0.091900
1.08	22.625199	0.642259	0.468356	-0.173167	0.716470	-0.407587	0.090460
1.09	30.111002	0.684302	0.465875	-0.180214	0.713849	-0.413694	0.085398
1.10	42.653587	0.722424	0.464196	-0.185026	0.711737	-0.412144	0.075683
1.11	63.853041	0.752108	0.463222	-0.187870	0.709822	-0.405912	0.061670
1.12	96.815322	0.770340	0.462453	-0.189975	0.707601	-0.401045	0.046310

ตารางที่ ช.18 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.75$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	4.470485	0.234309	0.495790	-0.061962	0.745290	-0.166133	0.005153
1.02	6.711383	0.330837	0.491668	-0.087357	0.740778	-0.231454	0.007062
1.03	8.807622	0.404669	0.487651	-0.106576	0.736463	-0.278811	0.008358
1.04	11.023931	0.466826	0.483765	-0.122471	0.732352	-0.315998	0.009291
1.05	13.555806	0.521610	0.480043	-0.136103	0.728454	-0.345830	0.009947
1.06	16.643542	0.571221	0.476531	-0.147965	0.724793	-0.369482	0.010356
1.07	20.660004	0.616880	0.473294	-0.158274	0.721398	-0.387316	0.010513
1.08	26.253880	0.659103	0.470419	-0.167077	0.718305	-0.399203	0.010382
1.09	34.607841	0.697538	0.468007	-0.174306	0.715533	-0.404886	0.009900
1.10	47.777685	0.730546	0.466116	-0.179913	0.713027	-0.404884	0.008999
1.11	68.682298	0.755527	0.464649	-0.184156	0.710587	-0.401770	0.007699
1.12	100.457946	0.771324	0.463357	-0.187672	0.707964	-0.399391	0.006169

ตารางที่ ช.19 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.85$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	2.739310	0.193629	0.495131	-0.069284	0.842716	-0.153970	0.181966
1.02	4.362346	0.278690	0.490271	-0.097738	0.835868	-0.216848	0.249059
1.03	6.261827	0.350755	0.485504	-0.119076	0.829621	-0.263408	0.291643
1.04	9.251760	0.425266	0.481086	-0.135803	0.824468	-0.298539	0.312122
1.05	29.373798	0.601344	0.481629	-0.134179	0.827511	-0.282724	0.202480

ตารางที่ ช.20 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.85$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	6.409036	0.251888	0.495862	-0.062498	0.844275	-0.157930	0.040786
1.02	10.445748	0.363999	0.492016	-0.087077	0.839246	-0.215524	0.053537
1.03	15.644550	0.459741	0.488685	-0.104080	0.835158	-0.250474	0.058695
1.04	25.087183	0.557432	0.486449	-0.114562	0.832643	-0.263786	0.055060
1.05	56.346445	0.676918	0.487128	-0.112533	0.833392	-0.239187	0.032662

ตารางที่ ช.21 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.85$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	7.287524	0.263461	0.496106	-0.060046	0.844615	-0.157043	0.004621
1.02	11.882011	0.379684	0.492547	-0.083540	0.839924	-0.212753	0.006041
1.03	17.785591	0.477386	0.489521	-0.099711	0.836130	-0.245206	0.006597
1.04	28.270364	0.573628	0.487503	-0.109801	0.833720	-0.256360	0.006196
1.05	59.673997	0.682584	0.487743	-0.109762	0.833855	-0.235482	0.003957

ตารางที่ ซ.22 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.85$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	2.261254	0.254772	0.747279	-0.060963	0.844875	-0.109408	0.231796
1.02	3.512668	0.355495	0.744493	-0.087053	0.839967	-0.153934	0.323151
1.03	4.821002	0.430267	0.741646	-0.107622	0.835265	-0.187299	0.390111
1.04	6.416127	0.492056	0.738744	-0.125404	0.830779	-0.214364	0.443775
1.05	8.642125	0.546722	0.735803	-0.141433	0.826556	-0.236583	0.488048
1.06	12.431781	0.599300	0.732865	-0.156195	0.822759	-0.253642	0.523460
1.07	25.231197	0.668096	0.730187	-0.169520	0.820584	-0.258382	0.535688

ตารางที่ ซ.23 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.85$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	6.111291	0.265584	0.746310	-0.055932	0.844835	-0.146472	0.062915
1.02	9.807289	0.378330	0.742902	-0.080711	0.840196	-0.199749	0.089996
1.03	14.235902	0.468885	0.739839	-0.100795	0.836177	-0.233300	0.111764
1.04	21.084775	0.552341	0.737265	-0.118568	0.833008	-0.251461	0.131239
1.05	36.640877	0.641093	0.735546	-0.134559	0.831367	-0.249219	0.148603

ตารางที่ ซ.24 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_C, \bar{y}_C, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 $(\alpha < \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.85$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_C$	$\bar{y}_C$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	7.248829	0.265063	0.745870	-0.053460	0.844682	-0.155723	0.007509
1.02	11.795953	0.381311	0.742182	-0.077560	0.840036	-0.210941	0.010923
1.03	17.584805	0.478287	0.739074	-0.097398	0.836245	-0.243292	0.013857
1.04	27.653968	0.572626	0.736856	-0.115187	0.833740	-0.255230	0.016757
1.05	56.598453	0.678293	0.736203	-0.130725	0.833598	-0.237049	0.019635

ตารางที่ ช.25 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha=\beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha=0.25,\ \beta=0.25$ และค่า $\bar{K}=1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	1.923197	0.153420	0.235241	-0.084569	-0.359224	0.340071
1.04	2.885469	0.212681	0.220157	-0.118370	-0.513114	0.479161
1.06	3.769558	0.255317	0.204755	-0.143341	-0.634807	0.584921
1.08	4.672940	0.288949	0.189041	-0.163479	-0.740535	0.673453
1.10	5.652836	0.316598	0.173023	-0.180322	-0.836544	0.751062
1.12	6.764769	0.339849	0.156709	-0.194645	-0.926029	0.821018
1.14	8.079172	0.359664	0.140108	-0.206897	-1.010881	0.885300
1.16	9.699650	0.376687	0.123231	-0.217355	-1.092328	0.945224
1.18	11.794965	0.391375	0.106087	-0.226203	-1.171210	1.001746
1.20	14.667767	0.404072	0.088692	-0.233559	-1.248104	1.055611
1.22	18.927244	0.415056	0.071062	-0.239504	-1.323363	1.107481
1.24	26.015014	0.424572	0.053221	-0.244087	-1.397034	1.158072
1.26	40.362239	0.432894	0.035206	-0.247338	-1.468473	1.208532
1.28	85.198742	0.440593	0.017121	-0.249286	-1.534254	1.262260
1.29	181.297287	0.444897	0.008186	-0.249792	-1.560088	1.295172

ตารางที่ ช.26 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha=\beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha=0.25,\ \beta=0.25$ และค่า $\bar{K}=10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	5.275637	0.216211	0.238031	-0.075939	-0.347401	0.093591
1.04	7.848168	0.300192	0.225937	-0.106338	-0.493448	0.131420
1.06	10.147195	0.360848	0.213717	-0.128900	-0.607105	0.159966
1.08	12.417125	0.408840	0.201367	-0.147243	-0.704335	0.183739
1.10	14.774475	0.448398	0.188889	-0.162768	-0.791282	0.204507
1.12	17.305107	0.481750	0.176285	-0.176192	-0.871063	0.223182
1.14	20.092053	0.510266	0.163562	-0.187936	-0.945487	0.240310
1.16	23.230372	0.534874	0.150730	-0.198267	-1.015688	0.256241
1.18	26.840756	0.556253	0.137805	-0.207369	-1.082396	0.271220
1.20	31.087250	0.574924	0.124808	-0.215371	-1.146075	0.285425
1.22	36.204738	0.591306	0.111763	-0.222369	-1.206991	0.298997
1.24	42.545817	0.605750	0.098705	-0.228435	-1.265241	0.312056
1.26	50.666701	0.618556	0.085676	-0.233630	-1.320754	0.324719
1.28	61.496472	0.629996	0.072729	-0.238004	-1.373262	0.337118
1.30	76.700147	0.640326	0.059939	-0.241604	-1.422238	0.349422
1.32	99.545300	0.649802	0.047407	-0.244479	-1.466783	0.361873
1.34	137.287779	0.658707	0.035286	-0.246681	-1.505469	0.374844
1.36	209.232920	0.667379	0.023816	-0.248270	-1.536215	0.388951
1.38	384.626116	0.676259	0.013396	-0.249311	-1.556700	0.405250
1.39	598.342154	0.680966	0.008787	-0.249645	-1.562840	0.414780

ตารางที่ ช.27 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.25$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	6.252093	0.231914	0.239319	-0.071562	-0.336362	0.011129
1.04	9.274962	0.321667	0.228540	-0.100329	-0.477216	0.015644
1.06	11.955205	0.386232	0.217652	-0.121785	-0.586523	0.019069
1.08	14.577915	0.437074	0.206649	-0.139334	-0.679810	0.021939
1.10	17.272203	0.478743	0.195525	-0.154295	-0.763060	0.024464
1.12	20.125488	0.513644	0.184281	-0.167341	-0.839298	0.026752
1.14	23.214259	0.543260	0.172918	-0.178865	-0.910275	0.028865
1.16	26.617925	0.568602	0.161448	-0.189118	-0.977076	0.030843
1.18	30.428670	0.590411	0.149883	-0.198270	-1.040398	0.032712
1.20	34.761643	0.609262	0.138244	-0.206441	-1.100683	0.034490
1.22	39.768190	0.625614	0.126557	-0.213719	-1.158196	0.036189
1.24	45.655164	0.639850	0.114851	-0.220171	-1.213063	0.037820
1.26	52.715131	0.652291	0.103166	-0.225852	-1.265295	0.039392
1.28	61.376079	0.663215	0.091545	-0.230809	-1.314793	0.040911
1.30	72.287388	0.672861	0.080041	-0.235084	-1.361345	0.042389
1.32	86.476564	0.681445	0.068716	-0.238718	-1.404609	0.043835
1.34	105.653131	0.689156	0.057649	-0.241750	-1.444096	0.045265
1.36	132.843375	0.696173	0.046936	-0.244223	-1.479153	0.046698
1.38	173.848823	0.702660	0.036700	-0.246184	-1.508976	0.048160
1.40	241.049137	0.708770	0.027101	-0.247680	-1.532717	0.049684
1.42	365.244525	0.714647	0.018345	-0.248760	-1.549797	0.051313
1.44	643.858114	0.720424	0.010707	-0.249470	-1.560529	0.053103
1.45	943.406781	0.723317	0.007425	-0.249701	-1.564023	0.054081

ตารางที่ ช.28 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.50$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	1.232371	0.218573	0.489810	-0.099835	-0.225435	0.294579
1.04	1.803453	0.302256	0.479241	-0.141768	-0.321420	0.411880
1.06	2.288313	0.362090	0.468294	-0.174263	-0.396876	0.499042
1.08	2.740250	0.409066	0.456971	-0.201863	-0.462019	0.570406
1.10	3.179904	0.447555	0.445272	-0.226306	-0.520776	0.631631
1.12	3.617933	0.479854	0.433198	-0.248469	-0.575144	0.685674
1.14	4.060730	0.507360	0.420752	-0.268864	-0.626306	0.734318
1.16	4.512513	0.531000	0.407933	-0.287816	-0.675025	0.778741
1.18	4.976288	0.551432	0.394743	-0.305544	-0.721831	0.819771
1.20	5.454395	0.569147	0.381183	-0.322205	-0.767106	0.858015
1.22	5.948889	0.584525	0.367255	-0.337908	-0.811140	0.893930
1.24	6.461867	0.597867	0.352960	-0.352737	-0.854153	0.927873
1.26	6.995784	0.609423	0.338301	-0.366753	-0.896322	0.960123
1.28	7.553810	0.619400	0.323279	-0.380001	-0.937787	0.990908
1.30	8.140228	0.627974	0.307898	-0.392516	-0.978660	1.020412
1.32	8.760928	0.635299	0.292160	-0.404322	-1.019033	1.048791
1.34	9.424016	0.641507	0.276070	-0.415437	-1.058979	1.076176
1.36	10.140639	0.646714	0.259633	-0.425873	-1.098555	1.102686
1.38	10.926115	0.651024	0.242852	-0.435637	-1.137804	1.128426
1.40	11.801602	0.654527	0.225735	-0.444732	-1.176753	1.153499
1.42	12.796651	0.657304	0.208287	-0.453160	-1.215412	1.178008
1.44	13.953296	0.659429	0.190516	-0.460916	-1.253776	1.202061
1.46	15.332931	0.660968	0.172432	-0.467996	-1.291813	1.225780
1.48	17.028446	0.661983	0.154044	-0.474394	-1.329459	1.249313
1.50	19.187022	0.662532	0.135365	-0.480102	-1.366606	1.272845
1.52	22.056241	0.662677	0.116409	-0.485111	-1.403074	1.296632
1.54	26.086844	0.662485	0.097196	-0.489414	-1.438572	1.321048
1.56	32.193510	0.662042	0.077751	-0.493002	-1.472624	1.346687
1.58	42.551948	0.661469	0.058114	-0.495870	-1.504433	1.374597
1.60	63.871263	0.660980	0.038351	-0.498014	-1.532650	1.406889
1.62	131.388685	0.661063	0.018600	-0.499421	-1.555182	1.449036

ตารางที่ ช.29 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha=\beta)$
โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha=0.50,\ \beta=0.50$ และค่า $\bar{K}=10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	3.627373	0.256994	0.489883	-0.094980	-0.261687	0.086212
1.04	5.348722	0.356560	0.479528	-0.134855	-0.369961	0.120610
1.06	6.854011	0.428232	0.468923	-0.165750	-0.453112	0.146371
1.08	8.307665	0.484644	0.458060	-0.191998	-0.523385	0.167760
1.10	9.778694	0.530762	0.446926	-0.215267	-0.585548	0.186494
1.12	11.306310	0.569171	0.435510	-0.236402	-0.642060	0.203480
1.14	12.915826	0.601443	0.423799	-0.255900	-0.694385	0.219270
1.16	14.623947	0.628645	0.411783	-0.274079	-0.743478	0.234222
1.18	16.440902	0.651567	0.399453	-0.291152	-0.789994	0.248569
1.20	18.371665	0.670840	0.386804	-0.307266	-0.834404	0.262464
1.22	20.417132	0.686992	0.373833	-0.322525	-0.877052	0.275997
1.24	22.575566	0.700484	0.360543	-0.337004	-0.918194	0.289215
1.26	24.844363	0.711720	0.346939	-0.350753	-0.958018	0.302137
1.28	27.221987	0.721057	0.333033	-0.363811	-0.996670	0.314765
1.30	29.709958	0.728807	0.318835	-0.376204	-1.034253	0.327089
1.32	32.314770	0.735237	0.304360	-0.387951	-1.070843	0.339102
1.34	35.049735	0.740575	0.289627	-0.399068	-1.106494	0.350797
1.36	37.936872	0.745014	0.274651	-0.409566	-1.141237	0.362174
1.38	41.009030	0.748714	0.259454	-0.419453	-1.175084	0.373241
1.40	44.312528	0.751806	0.244056	-0.428738	-1.208034	0.384015
1.42	47.910780	0.754399	0.228479	-0.437427	-1.240068	0.394522
1.44	51.889537	0.756585	0.212746	-0.445527	-1.271154	0.404799
1.46	56.364717	0.758436	0.196883	-0.453042	-1.301247	0.414892
1.48	61.494494	0.760016	0.180916	-0.459978	-1.330288	0.424858
1.50	67.498485	0.761375	0.164874	-0.466342	-1.358206	0.434766
1.52	74.689124	0.762558	0.148790	-0.472138	-1.384920	0.444699
1.54	83.525128	0.763604	0.132700	-0.477372	-1.410342	0.454761
1.56	94.706993	0.764546	0.116643	-0.482051	-1.434378	0.465076
1.58	109.358001	0.765415	0.100667	-0.486179	-1.456937	0.475804
1.60	129.393939	0.766243	0.084829	-0.489763	-1.477944	0.487153
1.62	158.354357	0.767060	0.069200	-0.492806	-1.497348	0.499410

ตารางที่ ช.30 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.50$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	4.454298	0.267689	0.489924	-0.092158	-0.271573	0.010580
1.04	6.593898	0.371617	0.479683	-0.130881	-0.382927	0.014844
1.06	8.491438	0.446427	0.469257	-0.160907	-0.467827	0.018079
1.08	10.354082	0.505187	0.458626	-0.186445	-0.539123	0.020811
1.10	12.272982	0.553009	0.447768	-0.209116	-0.601838	0.023254
1.12	14.302918	0.592551	0.436660	-0.229747	-0.658570	0.025523
1.14	16.480972	0.625435	0.425283	-0.248822	-0.710869	0.027688
1.16	18.832118	0.652781	0.413618	-0.266651	-0.759734	0.029794
1.18	21.371096	0.675444	0.401654	-0.283441	-0.805849	0.031869
1.20	24.103534	0.694132	0.389383	-0.299332	-0.849691	0.033927
1.22	27.027528	0.709456	0.376805	-0.314420	-0.891603	0.035974
1.24	30.135992	0.721961	0.363927	-0.328771	-0.931834	0.038010
1.26	33.419607	0.732128	0.350760	-0.342429	-0.970569	0.040029
1.28	36.869931	0.740376	0.337319	-0.355427	-1.007946	0.042024
1.30	40.482302	0.747063	0.323624	-0.367788	-1.044068	0.043988
1.32	44.258379	0.752490	0.309693	-0.379527	-1.079015	0.045913
1.34	48.208280	0.756903	0.295549	-0.390659	-1.112842	0.047794
1.36	52.352469	0.760505	0.281215	-0.401195	-1.145590	0.049626
1.38	56.723737	0.763455	0.266714	-0.411144	-1.177284	0.051408
1.40	61.369412	0.765886	0.252070	-0.420516	-1.207937	0.053139
1.42	66.354345	0.767898	0.237308	-0.429318	-1.237549	0.054820
1.44	71.764895	0.769575	0.222454	-0.437558	-1.266112	0.056453
1.46	77.714823	0.770982	0.207536	-0.445244	-1.293610	0.058043
1.48	84.353801	0.772171	0.192583	-0.452385	-1.320021	0.059594
1.50	91.880124	0.773185	0.177625	-0.458986	-1.345317	0.061113
1.52	100.560051	0.774057	0.162694	-0.465057	-1.369471	0.062608
1.54	110.757820	0.774817	0.147827	-0.470606	-1.392454	0.064088
1.56	122.983785	0.775485	0.133061	-0.475639	-1.414239	0.065562
1.58	137.973921	0.776082	0.118438	-0.480167	-1.434806	0.067042
1.60	156.827275	0.776625	0.104008	-0.484197	-1.454144	0.068543

ตารางที่ ช.31 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.75$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	1.344302	0.246970	0.747259	-0.060960	-0.110666	0.238450
1.02	1.994275	0.343133	0.744439	-0.087039	-0.156499	0.333244
1.03	2.575753	0.413058	0.741541	-0.107597	-0.191644	0.403593
1.04	3.154899	0.468997	0.738563	-0.125372	-0.221223	0.461150
1.05	3.766048	0.515801	0.735504	-0.141411	-0.247198	0.510544
1.06	4.437359	0.556010	0.732366	-0.156246	-0.270552	0.554224
1.07	5.198932	0.591150	0.729148	-0.170186	-0.291842	0.593710
1.08	6.088193	0.622226	0.725852	-0.183435	-0.311401	0.630058
1.09	7.156030	0.649927	0.722478	-0.196129	-0.329421	0.664079
1.10	8.475988	0.674741	0.719028	-0.208370	-0.346000	0.696454
1.11	10.159766	0.697003	0.715504	-0.220233	-0.361156	0.727819
1.12	12.384974	0.716921	0.711908	-0.231779	-0.374842	0.758833
1.13	15.447000	0.734577	0.708242	-0.243055	-0.386959	0.790234
1.14	19.858614	0.749914	0.704504	-0.254099	-0.397389	0.822899
1.15	26.544041	0.762717	0.700690	-0.264941	-0.406089	0.857848
1.16	37.225821	0.772663	0.696787	-0.275596	-0.413250	0.896144
1.17	55.297618	0.779515	0.692776	-0.286068	-0.419459	0.938674
1.18	88.530584	0.783427	0.688640	-0.296349	-0.425582	0.986204

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ตารางที่ ช.32 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha = \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.75$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	3.737494	0.242753	0.746015	-0.055199	-0.153628	0.067005
1.02	5.590120	0.340746	0.742147	-0.079426	-0.214229	0.095291
1.03	7.299412	0.414310	0.738389	-0.098904	-0.258437	0.117561
1.04	9.072625	0.475040	0.734739	-0.116047	-0.293534	0.137037
1.05	11.045466	0.527457	0.731197	-0.131775	-0.322235	0.155102
1.06	13.364085	0.573860	0.727770	-0.146555	-0.345796	0.172629
1.07	16.228175	0.615541	0.724465	-0.160671	-0.364804	0.190352
1.08	19.943357	0.653190	0.721289	-0.174311	-0.379477	0.209040
1.09	25.002707	0.686992	0.718248	-0.187610	-0.389860	0.229607
1.10	32.205271	0.716598	0.715324	-0.200658	-0.396099	0.253154
1.11	42.771908	0.741143	0.712460	-0.213492	-0.398871	0.280825
1.12	58.344777	0.759680	0.709553	-0.226091	-0.399720	0.313371
1.13	80.900678	0.772063	0.706495	-0.238401	-0.400609	0.350817

ตารางที่ ช.33 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \overline{x^*}, \overline{y^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 $(\alpha=\beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha=0.75,\ \beta=0.75$ และค่า $\bar{K}=100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\overline{x^*}$	$\overline{y^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.01	4.452420	0.236534	0.745414	-0.052170	-0.164789	0.008032
1.02	6.682037	0.333697	0.741017	-0.075347	-0.229494	0.011530
1.03	8.765257	0.407803	0.736806	-0.094160	-0.276362	0.014371
1.04	10.963970	0.469990	0.732786	-0.110864	-0.313143	0.016944
1.05	13.468919	0.524594	0.728964	-0.126318	-0.342655	0.019434
1.06	16.510549	0.573819	0.725359	-0.140966	-0.366099	0.021979
1.07	20.439478	0.618869	0.721995	-0.155082	-0.383893	0.024726
1.08	25.851344	0.660251	0.718898	-0.168861	-0.396001	0.027873
1.09	33.802669	0.697668	0.716080	-0.182441	-0.402283	0.031704
1.10	46.090006	0.729733	0.713490	-0.195886	-0.403248	0.036602
1.11	65.279772	0.754275	0.710962	-0.209155	-0.401088	0.042937
1.12	94.242764	0.770230	0.708284	-0.222129	-0.399187	0.050881

ตารางที่ ช.34 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.15$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	3.138369	0.152293	0.235210	-0.084562	0.140389	-0.369183	0.331241
1.04	4.736589	0.211081	0.220093	-0.118359	0.130603	-0.527209	0.466771
1.06	6.229431	0.253353	0.204654	-0.143325	0.120648	-0.652077	0.569865
1.08	7.781937	0.286676	0.188900	-0.163457	0.110530	-0.760479	0.656209
1.10	9.498679	0.314054	0.172839	-0.180291	0.100256	-0.858840	0.731938
1.12	11.489384	0.337059	0.156478	-0.194603	0.089833	-0.950447	0.800233
1.14	13.902456	0.356646	0.139826	-0.206840	0.079269	-1.037252	0.863012
1.16	16.968934	0.373453	0.122893	-0.217280	0.068573	-1.120526	0.921543
1.18	21.088616	0.387929	0.105690	-0.226104	0.057756	-1.201144	0.976732
1.20	27.034358	0.400412	0.088229	-0.233432	0.046832	-1.279715	1.029265
1.22	36.532675	0.411164	0.070525	-0.239342	0.035819	-1.356612	1.079708
1.24	54.388883	0.420409	0.052597	-0.243882	0.024751	-1.431833	1.128613
1.26	100.557693	0.428387	0.034476	-0.247089	0.013725	-1.504173	1.176834
1.28	424.047670	0.435785	0.016286	-0.249034	0.003338	-1.563379	1.228306

ตารางที่ ช.35 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.15$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	8.311019	0.209569	0.237567	-0.076710	0.140812	-0.375794	0.087318
1.04	12.530846	0.290965	0.224989	-0.107381	0.131592	-0.534163	0.122493
1.06	16.446375	0.349765	0.212267	-0.130107	0.122338	-0.657650	0.148944
1.08	20.469617	0.396313	0.199399	-0.148540	0.113052	-0.763467	0.170885
1.10	24.833632	0.434711	0.186389	-0.164097	0.103737	-0.858230	0.189970
1.12	29.751503	0.467121	0.173242	-0.177499	0.094400	-0.945281	0.207057
1.14	35.475164	0.494870	0.159965	-0.189171	0.085052	-1.026555	0.222656
1.16	42.346995	0.518858	0.146570	-0.199385	0.075706	-1.103248	0.237099
1.18	50.874824	0.539738	0.133073	-0.208327	0.066380	-1.176106	0.250620
1.20	61.867026	0.558012	0.119493	-0.216128	0.057099	-1.245558	0.263387
1.22	76.706319	0.574086	0.105857	-0.222888	0.047896	-1.311756	0.275539
1.24	97.967165	0.588303	0.092199	-0.228686	0.038816	-1.374531	0.287200
1.26	130.995996	0.600978	0.078568	-0.233591	0.029933	-1.433235	0.298509
1.28	188.693524	0.612429	0.065039	-0.237674	0.021369	-1.486341	0.309667
1.30	309.907622	0.623045	0.051746	-0.241022	0.013365	-1.530573	0.321034
1.32	664.183279	0.633386	0.038949	-0.243763	0.006417	-1.559824	0.333332
1.34	3037.124075	0.644233	0.027110	-0.246036	0.001453	-1.569666	0.347881

ตารางที่ ช.36 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25,\ \beta = 0.15$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	9.765778	0.223474	0.238594	-0.072986	0.141238	-0.371524	0.010273
1.04	14.702869	0.309975	0.227067	-0.102260	0.132455	-0.527712	0.014415
1.06	19.263990	0.372235	0.215410	-0.124033	0.123646	-0.649300	0.017535
1.08	23.925290	0.421312	0.203621	-0.141776	0.114807	-0.753354	0.020130
1.10	28.945760	0.461599	0.191696	-0.156832	0.105939	-0.846429	0.022394
1.12	34.550469	0.495418	0.179639	-0.169888	0.097047	-0.931826	0.024429
1.14	40.992479	0.524200	0.167455	-0.181346	0.088140	-1.011438	0.026292
1.16	48.599617	0.548919	0.155156	-0.191464	0.079233	-1.086419	0.028023
1.18	57.834644	0.570287	0.142758	-0.200416	0.070347	-1.157475	0.029647
1.20	69.393882	0.588854	0.130282	-0.208329	0.061508	-1.225002	0.031183
1.22	84.388939	0.605064	0.117757	-0.215296	0.052750	-1.289136	0.032645
1.24	104.712031	0.619287	0.105216	-0.221395	0.044119	-1.349754	0.034046
1.26	133.840326	0.631848	0.092708	-0.226690	0.035676	-1.406400	0.035399
1.28	178.812671	0.643045	0.080296	-0.231246	0.027512	-1.458120	0.036720
1.30	255.827333	0.653180	0.068075	-0.235132	0.019771	-1.503160	0.038035
1.32	409.544013	0.662580	0.056194	-0.238435	0.012690	-1.538593	0.039382
1.34	803.989440	0.671616	0.044880	-0.241258	0.006652	-1.560691	0.040827
1.36	2519.740143	0.680643	0.034444	-0.243692	0.002193	-1.568912	0.042455

ตารางที่ ช.37 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.15$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	3.675443	0.213062	0.489524	-0.098513	0.144882	-0.273043	0.260482
1.04	5.434564	0.294355	0.478661	-0.139864	0.139631	-0.389666	0.363434
1.06	6.973016	0.352291	0.467413	-0.171885	0.134250	-0.481583	0.439417
1.08	8.452094	0.397624	0.455781	-0.199061	0.128743	-0.561103	0.501218
1.10	9.939427	0.434644	0.443766	-0.223107	0.123115	-0.632929	0.553910
1.12	11.475687	0.465612	0.431370	-0.244890	0.117371	-0.699425	0.600162
1.14	13.091762	0.491905	0.418595	-0.264916	0.111521	-0.761963	0.641603
1.16	14.815500	0.514443	0.405445	-0.283506	0.105574	-0.821407	0.679324
1.18	16.675420	0.533883	0.391922	-0.300880	0.099540	-0.878334	0.714102
1.20	18.703537	0.550713	0.378030	-0.317192	0.093433	-0.933142	0.746519
1.22	20.938249	0.565312	0.363773	-0.332553	0.087264	-0.986115	0.777020
1.24	23.427902	0.577981	0.349155	-0.347049	0.081046	-1.037460	0.805961
1.26	26.235728	0.588965	0.334181	-0.360740	0.074794	-1.087330	0.833622
1.28	29.447147	0.598469	0.318855	-0.373675	0.068520	-1.135840	0.860234
1.30	33.181151	0.606663	0.303182	-0.385890	0.062237	-1.183079	0.885981
1.32	37.608867	0.613692	0.287169	-0.397410	0.055958	-1.229110	0.911016
1.34	42.985358	0.619681	0.270819	-0.408255	0.049695	-1.273979	0.935464
1.36	49.707223	0.624738	0.254139	-0.418438	0.043459	-1.317704	0.959429
1.38	58.424043	0.628957	0.237134	-0.427969	0.037264	-1.360269	0.982997
1.40	70.272291	0.632421	0.219812	-0.436854	0.031126	-1.401597	1.006249
1.42	87.419590	0.635208	0.202181	-0.445096	0.025065	-1.441499	1.029267
1.44	114.514980	0.637394	0.184253	-0.452702	0.019121	-1.479545	1.052152
1.46	163.345679	0.639064	0.166047	-0.459687	0.013367	-1.514764	1.075076
1.48	272.507015	0.640343	0.147601	-0.466094	0.007980	-1.544869	1.098393
1.50	639.581765	0.641456	0.128996	-0.472031	0.003386	-1.564816	1.122946
1.52	4796.477274	0.642762	0.110364	-0.477682	0.000451	-1.570457	1.150404

ตารางที่ ช.38 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.15$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	8.596283	0.224752	0.488353	-0.089707	0.142036	-0.352223	0.059967
1.04	12.890818	0.311344	0.476429	-0.127385	0.134019	-0.500725	0.083370
1.06	16.811915	0.373466	0.464218	-0.156542	0.125944	-0.616607	0.100456
1.08	20.766749	0.422307	0.451712	-0.181248	0.117809	-0.715998	0.114215
1.10	24.962867	0.462319	0.438906	-0.203061	0.109618	-0.805085	0.125846
1.12	29.566623	0.495851	0.425797	-0.222767	0.101375	-0.886985	0.135989
1.14	34.751492	0.524348	0.412384	-0.240827	0.093091	-0.963492	0.145038
1.16	40.728001	0.548789	0.398669	-0.257537	0.084779	-1.035710	0.153261
1.18	47.775982	0.569884	0.384657	-0.273099	0.076458	-1.104340	0.160850
1.20	56.291505	0.588178	0.370354	-0.287661	0.068149	-1.169810	0.167950
1.22	66.865318	0.604104	0.355771	-0.301332	0.059882	-1.232349	0.174677
1.24	80.425503	0.618019	0.340920	-0.314197	0.051687	-1.292011	0.181122
1.26	98.516872	0.630226	0.325819	-0.326330	0.043607	-1.348662	0.187364
1.28	123.894940	0.640989	0.310488	-0.337795	0.035695	-1.401924	0.193475
1.30	161.920014	0.650553	0.294957	-0.348658	0.028026	-1.451054	0.199528
1.32	224.267604	0.659155	0.279267	-0.358999	0.020714	-1.494713	0.205610
1.34	340.621391	0.667055	0.263480	-0.368925	0.013945	-1.530635	0.211843
1.36	606.063507	0.674541	0.247688	-0.378589	0.008016	-1.555575	0.218410
1.38	1482.478167	0.681917	0.232006	-0.388178	0.003360	-1.567348	0.225564
1.39	3021.866017	0.685642	0.224241	-0.392999	0.001671	-1.569384	0.229454

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ตารางที่ ช.39 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.15$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	9.801509	0.225203	0.487939	-0.086360	0.141383	-0.368748	0.006822
1.04	14.747173	0.312285	0.475652	-0.122699	0.132743	-0.523786	0.009489
1.06	19.307705	0.374908	0.463125	-0.150849	0.124072	-0.644496	0.011439
1.08	23.958547	0.424228	0.450343	-0.174715	0.115367	-0.747818	0.013012
1.10	28.955251	0.464679	0.437298	-0.195788	0.106629	-0.840256	0.014343
1.12	34.516598	0.498605	0.423982	-0.214823	0.097862	-0.925082	0.015506
1.14	40.885108	0.527450	0.410392	-0.232261	0.089076	-1.004174	0.016546
1.16	48.370951	0.552197	0.396528	-0.248386	0.080286	-1.078675	0.017493
1.18	57.406561	0.573566	0.382396	-0.263393	0.071512	-1.149286	0.018369
1.20	68.634045	0.592112	0.368001	-0.277426	0.062780	-1.216404	0.019191
1.22	83.062798	0.608281	0.353357	-0.290592	0.054124	-1.280178	0.019974
1.24	102.378846	0.622445	0.338480	-0.302981	0.045588	-1.340514	0.020727
1.26	129.606217	0.634927	0.323393	-0.314673	0.037229	-1.397019	0.021461
1.28	170.671658	0.646022	0.308126	-0.325747	0.029130	-1.448867	0.022187
1.30	238.613707	0.656015	0.292728	-0.336298	0.021419	-1.494557	0.022917
1.32	367.053507	0.665212	0.277267	-0.346452	0.014299	-1.531577	0.023668
1.34	666.256342	0.673945	0.261845	-0.356383	0.008097	-1.556514	0.024464
1.36	1700.006679	0.682546	0.246586	-0.366292	0.003271	-1.567636	0.025340
1.37	3647.345658	0.686881	0.239057	-0.371299	0.001551	-1.569503	0.025821

ตารางที่ ช.40 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$
โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.25$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	2.244331	0.214430	0.489613	-0.098949	0.242882	-0.255568	0.266470
1.04	3.300930	0.296307	0.478842	-0.140495	0.235560	-0.364659	0.371884
1.06	4.211002	0.354701	0.467687	-0.172677	0.228034	-0.450596	0.449743
1.08	5.072125	0.400427	0.456150	-0.199998	0.220308	-0.524917	0.513114
1.10	5.923522	0.437795	0.444232	-0.224181	0.212385	-0.592035	0.567175
1.12	6.787070	0.469076	0.431934	-0.246095	0.204270	-0.654179	0.614650
1.14	7.677717	0.495653	0.419259	-0.266249	0.195971	-0.712646	0.657196
1.16	8.607403	0.518447	0.406209	-0.284966	0.187496	-0.768261	0.695922
1.18	9.586997	0.538117	0.392785	-0.302464	0.178853	-0.821578	0.731618
1.20	10.627527	0.555151	0.378992	-0.318898	0.170055	-0.872985	0.764873
1.22	11.741204	0.569930	0.364832	-0.334380	0.161111	-0.922762	0.796142
1.24	12.942474	0.582755	0.350308	-0.348993	0.152035	-0.971118	0.825780
1.26	14.249271	0.593873	0.335425	-0.362799	0.142839	-1.018208	0.854077
1.28	15.684657	0.603488	0.320187	-0.375845	0.133537	-1.064153	0.881263
1.30	17.279117	0.611772	0.304599	-0.388167	0.124142	-1.109044	0.907530
1.32	19.073879	0.618873	0.288664	-0.399790	0.114666	-1.152955	0.933033
1.34	21.125977	0.624916	0.272388	-0.410734	0.105123	-1.195940	0.957902
1.36	23.516239	0.630013	0.255776	-0.421012	0.095526	-1.238036	0.982245
1.37	26.362486	0.634258	0.238834	-0.430632	0.085888	-1.279261	1.006154
1.40	29.842412	0.637737	0.221568	-0.439598	0.076224	-1.319605	1.029711
1.42	34.235529	0.640525	0.203986	-0.447914	0.066552	-1.359020	1.052996
1.44	40.005411	0.642692	0.186096	-0.455579	0.056893	-1.397394	1.076094
1.46	47.974832	0.644305	0.167910	-0.462595	0.047280	-1.434509	1.099109
1.48	59.740048	0.645433	0.149443	-0.468966	0.037765	-1.469952	1.122194
1.50	78.796969	0.646159	0.130717	-0.474704	0.028436	-1.502950	1.145598
1.52	114.260959	0.646594	0.111768	-0.479838	0.019462	-1.532037	1.169781
1.54	197.482861	0.646918	0.092660	-0.484431	0.011182	-1.554552	1.195651
1.56	514.221836	0.647422	0.073493	-0.488590	0.004277	-1.567001	1.225037
1.57	1273.140669	0.647882	0.063934	-0.490549	0.001727	-1.569473	1.242096

ตารางที่ ช.41 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.25$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	5.442643	0.231495	0.488732	-0.091416	0.240183	-0.319011	0.064018
1.04	8.058007	0.320728	0.477187	-0.129821	0.230238	-0.453107	0.088994
1.06	10.362120	0.384755	0.465355	-0.159559	0.220159	-0.557491	0.107230
1.08	12.600279	0.435086	0.453229	-0.184780	0.209941	-0.646826	0.121919
1.10	14.880215	0.476294	0.440802	-0.207073	0.199581	-0.726751	0.134344
1.12	17.271395	0.510791	0.428070	-0.227240	0.189081	-0.800118	0.145188
1.14	19.831142	0.540058	0.415031	-0.245754	0.178446	-0.868581	0.154871
1.16	22.615623	0.565101	0.401685	-0.262914	0.167686	-0.933168	0.163679
1.18	25.686773	0.586651	0.388035	-0.278929	0.156813	-0.994549	0.171817
1.20	29.118579	0.605270	0.374088	-0.293946	0.145846	-1.053162	0.179442
1.22	33.004463	0.621407	0.359852	-0.308075	0.134809	-1.109286	0.186672
1.24	37.467291	0.635429	0.345337	-0.321401	0.123726	-1.163084	0.193605
1.26	42.674062	0.647647	0.330556	-0.333990	0.112630	-1.214625	0.200320
1.28	48.858646	0.658323	0.315525	-0.345897	0.101555	-1.263899	0.206884
1.30	56.358613	0.667687	0.300263	-0.357169	0.090542	-1.310817	0.213354
1.32	65.677569	0.675936	0.284789	-0.367848	0.079637	-1.355205	0.219786
1.34	77.595933	0.683247	0.269129	-0.377973	0.068895	-1.396791	0.226234
1.36	93.379046	0.689781	0.253310	-0.387586	0.058382	-1.435185	0.232756
1.37	115.195220	0.695683	0.237366	-0.396730	0.048179	-1.469854	0.239422
1.40	147.028545	0.701091	0.221336	-0.405458	0.038389	-1.500116	0.246316
1.42	196.900646	0.706138	0.205269	-0.413829	0.029146	-1.525173	0.253548
1.44	283.142664	0.710949	0.189219	-0.421908	0.020622	-1.544278	0.261262
1.46	456.342141	0.715642	0.173247	-0.429767	0.013040	-1.557160	0.269647
1.48	907.434571	0.720330	0.157426	-0.437479	0.006703	-1.564701	0.278961

ตารางที่ ช.42 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.25$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	6.272521	0.233643	0.488392	-0.088324	0.239575	-0.332930	0.007372
1.04	9.300165	0.323980	0.476559	-0.125497	0.229050	-0.472353	0.010253
1.06	11.980386	0.388911	0.464485	-0.154311	0.218416	-0.580560	0.012358
1.08	14.598431	0.439999	0.452155	-0.178764	0.207664	-0.672920	0.014057
1.10	17.282333	0.481835	0.439559	-0.200386	0.196789	-0.755352	0.015497
1.12	20.117483	0.516845	0.426688	-0.219949	0.185791	-0.830851	0.016756
1.14	23.177207	0.546522	0.413536	-0.237908	0.174672	-0.901147	0.017883
1.16	26.536196	0.571888	0.400104	-0.254552	0.163443	-0.967314	0.018913
1.18	30.279677	0.593690	0.386393	-0.270083	0.152118	-1.030041	0.019867
1.20	34.512471	0.612508	0.372410	-0.284643	0.140715	-1.089766	0.020765
1.22	39.370365	0.628805	0.358164	-0.298340	0.129259	-1.146755	0.021621
1.24	45.036244	0.642966	0.343667	-0.311259	0.117782	-1.201142	0.022446
1.26	51.764691	0.655315	0.328937	-0.323468	0.106320	-1.252951	0.023249
1.28	59.921431	0.666129	0.313992	-0.335023	0.094914	-1.302109	0.024040
1.30	70.049578	0.675647	0.298855	-0.345977	0.083613	-1.348441	0.024825
1.32	82.986411	0.684081	0.283553	-0.356377	0.072476	-1.391664	0.025613
1.34	100.080762	0.691618	0.268118	-0.366273	0.061573	-1.431372	0.026411
1.36	123.624979	0.698426	0.252585	-0.375717	0.050989	-1.467019	0.027229
1.37	157.785616	0.704662	0.236999	-0.384767	0.040830	-1.497929	0.028078
1.40	210.830431	0.710466	0.221410	-0.393487	0.031229	-1.523357	0.028973
1.42	301.270420	0.715969	0.205873	-0.401949	0.022354	-1.542675	0.029932
1.44	478.609581	0.721287	0.190454	-0.410225	0.014422	-1.555787	0.030978
1.46	919.505469	0.726528	0.175227	-0.418394	0.007718	-1.563694	0.032144

ตารางที่ ช.43 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.35$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	1.650480	0.216039	0.489705	-0.099384	0.341478	-0.241328	0.275311
1.04	2.419719	0.298611	0.479028	-0.141123	0.332686	-0.344245	0.384417
1.06	3.076178	0.357555	0.467970	-0.173463	0.323625	-0.425259	0.465133
1.08	3.691352	0.403755	0.456532	-0.200926	0.314297	-0.495279	0.530930
1.10	4.293331	0.441546	0.444715	-0.225243	0.304703	-0.558487	0.587142
1.12	4.897100	0.473210	0.432520	-0.247287	0.294848	-0.617000	0.636567
1.14	5.512197	0.500136	0.419950	-0.267566	0.284735	-0.672060	0.680905
1.16	6.145553	0.523247	0.407005	-0.286406	0.274369	-0.724460	0.721289
1.18	6.802829	0.543203	0.393687	-0.304026	0.263756	-0.774740	0.758523
1.20	7.489211	0.560493	0.379999	-0.320580	0.252901	-0.823282	0.793206
1.22	8.209990	0.575497	0.365944	-0.336179	0.241812	-0.870368	0.825795
1.24	8.971096	0.588518	0.351522	-0.350906	0.230498	-0.916210	0.856653
1.26	9.779662	0.599802	0.336739	-0.364824	0.218965	-0.960970	0.886067
1.28	10.644692	0.609555	0.321596	-0.377978	0.207224	-1.004775	0.914271
1.30	11.577911	0.617951	0.306098	-0.390403	0.195283	-1.047727	0.941458
1.32	12.594893	0.625139	0.290249	-0.402124	0.183152	-1.089907	0.967784
1.34	13.716638	0.631247	0.274053	-0.413161	0.170840	-1.131378	0.993383
1.36	14.971875	0.636388	0.257514	-0.423524	0.158357	-1.172190	1.018364
1.37	16.400535	0.640659	0.240640	-0.433223	0.145715	-1.212375	1.042825
1.40	18.059253	0.644147	0.223434	-0.442261	0.132925	-1.251951	1.066853
1.42	20.030438	0.646930	0.205905	-0.450639	0.120000	-1.290912	1.090531
1.44	22.437986	0.649076	0.188060	-0.458355	0.106957	-1.329221	1.113943
1.46	25.476045	0.650649	0.169909	-0.465408	0.093814	-1.366796	1.137188
1.48	29.465363	0.651712	0.151462	-0.471794	0.080600	-1.403485	1.160390
1.50	34.973212	0.652328	0.132734	-0.477510	0.067356	-1.439019	1.183720
1.52	43.097687	0.652566	0.113745	-0.482559	0.054143	-1.472935	1.207445
1.54	56.246859	0.652515	0.094522	-0.486947	0.041067	-1.504425	1.232010
1.56	80.772270	0.652307	0.075109	-0.490699	0.028319	-1.532078	1.258226
1.58	139.475024	0.652157	0.055578	-0.493855	0.016274	-1.553552	1.287710
1.60	392.078594	0.652483	0.036057	-0.496482	0.005777	-1.566190	1.324166

ตารางที่ ช.44 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.35$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	4.245887	0.240325	0.489185	-0.093209	0.339633	-0.292477	0.070368
1.04	6.249390	0.333072	0.478099	-0.132376	0.329079	-0.414862	0.097913
1.06	7.986464	0.399664	0.466733	-0.162721	0.318332	-0.509778	0.118100
1.08	9.646211	0.452018	0.455078	-0.188483	0.307382	-0.590748	0.134438
1.10	11.306918	0.494854	0.443126	-0.211283	0.296225	-0.662991	0.148330
1.12	13.013746	0.530658	0.430871	-0.231944	0.284856	-0.729164	0.160524
1.14	14.798464	0.560953	0.418308	-0.250947	0.273274	-0.790817	0.171478
1.16	16.686905	0.586774	0.405434	-0.268599	0.261481	-0.848933	0.181503
1.18	18.702721	0.608877	0.392250	-0.285111	0.249482	-0.904158	0.190819
1.20	20.869891	0.627848	0.378759	-0.300630	0.237288	-0.956931	0.199591
1.22	23.214896	0.644156	0.364966	-0.315267	0.224911	-1.007551	0.207943
1.24	25.768992	0.658193	0.350880	-0.329103	0.212370	-1.056217	0.215976
1.26	28.570884	0.670288	0.336511	-0.342201	0.199685	-1.103057	0.223768
1.28	31.670082	0.680724	0.321871	-0.354611	0.186880	-1.148145	0.231381
1.30	35.131353	0.689744	0.306975	-0.366371	0.173983	-1.191512	0.238869
1.32	39.040892	0.697557	0.291840	-0.377515	0.161023	-1.233152	0.246278
1.34	43.515206	0.704344	0.276484	-0.388068	0.148033	-1.273025	0.253647
1.36	48.714414	0.710262	0.260925	-0.398054	0.135048	-1.311061	0.261017
1.37	54.862875	0.715446	0.245186	-0.407494	0.122108	-1.347157	0.268426
1.40	62.282383	0.720015	0.229289	-0.416407	0.109254	-1.381174	0.275914
1.42	71.447805	0.724071	0.213259	-0.424813	0.096535	-1.412936	0.283530
1.44	83.084748	0.727706	0.197124	-0.432732	0.084006	-1.442232	0.291329
1.46	98.350686	0.731002	0.180916	-0.440184	0.071731	-1.468815	0.299379
1.48	119.194316	0.734032	0.164668	-0.447192	0.059787	-1.492421	0.307766
1.50	149.131229	0.736863	0.148419	-0.453780	0.048266	-1.512800	0.316600
1.52	195.111247	0.739559	0.132214	-0.459970	0.037285	-1.529782	0.326027
1.54	272.725093	0.742183	0.116107	-0.465789	0.026995	-1.543375	0.336245
1.56	424.121609	0.744801	0.100165	-0.471265	0.017609	-1.553890	0.347547
1.57	564.162670	0.746134	0.092284	-0.473886	0.013351	-1.558179	0.353741

ตารางที่ ช.45 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50,\ \beta = 0.35$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	4.983127	0.245030	0.488958	-0.090380	0.339224	-0.304627	0.008257
1.04	7.342415	0.339823	0.477701	-0.128420	0.328291	-0.431447	0.011495
1.06	9.396251	0.407946	0.466209	-0.157924	0.317190	-0.529412	0.013875
1.08	11.368081	0.461491	0.454467	-0.182992	0.305906	-0.612694	0.015807
1.10	13.351619	0.505244	0.442460	-0.205193	0.294431	-0.686777	0.017456
1.12	15.401950	0.541731	0.430176	-0.225322	0.282755	-0.754453	0.018911
1.14	17.558721	0.572507	0.417608	-0.243846	0.270874	-0.817353	0.020225
1.16	19.855001	0.598637	0.404750	-0.261061	0.258789	-0.876499	0.021435
1.18	22.321862	0.620907	0.391601	-0.277172	0.246505	-0.932565	0.022568
1.20	24.991580	0.639933	0.378164	-0.292323	0.234030	-0.985997	0.023642
1.22	27.900533	0.656213	0.364446	-0.306619	0.221382	-1.037092	0.024672
1.24	31.092318	0.670165	0.350458	-0.320142	0.208579	-1.086041	0.025670
1.26	34.621482	0.682142	0.336212	-0.332953	0.195646	-1.132957	0.026644
1.28	38.558260	0.692445	0.321725	-0.345103	0.182610	-1.177896	0.027603
1.30	42.994941	0.701331	0.307016	-0.356631	0.169505	-1.220866	0.028553
1.32	48.054759	0.709023	0.292105	-0.367571	0.156365	-1.261839	0.029499
1.34	53.904847	0.715709	0.277014	-0.377953	0.143227	-1.300749	0.030447
1.36	60.775777	0.721551	0.261767	-0.387802	0.130133	-1.337502	0.031401
1.37	68.992117	0.726688	0.246390	-0.397145	0.117128	-1.371971	0.032369
1.40	79.022004	0.731238	0.230909	-0.406003	0.104262	-1.404004	0.033355
1.42	91.560964	0.735304	0.215356	-0.414401	0.091590	-1.433425	0.034367
1.44	107.680495	0.738972	0.199762	-0.422362	0.079173	-1.460046	0.035413
1.46	129.106953	0.742319	0.184161	-0.429910	0.067083	-1.483683	0.036502
1.48	158.782845	0.745411	0.168592	-0.437068	0.055402	-1.504191	0.037648
1.50	202.099290	0.748304	0.153098	-0.443861	0.044227	-1.521506	0.038864
1.52	269.926755	0.751052	0.137728	-0.450313	0.033680	-1.535716	0.040172
1.54	387.295987	0.753702	0.122542	-0.456449	0.023917	-1.547114	0.041597
1.55	482.567043	0.755007	0.115042	-0.459409	0.019395	-1.551909	0.042365

ตารางที่ ช.46 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.15$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	6.265031	0.298240	0.741184	-0.076869	0.144455	-0.291226	0.212847
1.04	9.452451	0.405407	0.731971	-0.110668	0.138668	-0.417638	0.289064
1.06	12.418888	0.477616	0.722304	-0.137703	0.132602	-0.519259	0.339931
1.08	15.459177	0.530898	0.712150	-0.161264	0.126237	-0.609078	0.376970
1.10	18.715277	0.571823	0.701493	-0.182598	0.119571	-0.691886	0.405035
1.12	22.289217	0.603956	0.690340	-0.202337	0.112621	-0.769917	0.426880
1.14	26.275072	0.629541	0.678710	-0.220862	0.105419	-0.844305	0.444323
1.16	30.775454	0.650117	0.666633	-0.238429	0.098007	-0.915633	0.458669
1.18	35.915258	0.666802	0.654147	-0.255223	0.090437	-0.984195	0.470891
1.20	41.857399	0.680431	0.641291	-0.271381	0.082761	-1.050119	0.481725
1.22	48.824205	0.691641	0.628104	-0.287011	0.075035	-1.113446	0.491728
1.24	57.129699	0.700923	0.614621	-0.302196	0.067311	-1.174155	0.501318
1.26	67.231850	0.708661	0.600874	-0.317002	0.059640	-1.232181	0.510804
1.28	79.822328	0.715156	0.586894	-0.331482	0.052073	-1.287412	0.520417
1.30	95.989807	0.720646	0.572706	-0.345681	0.044658	-1.339665	0.530318
1.32	117.536503	0.725324	0.558334	-0.359633	0.037444	-1.388659	0.540622
1.34	147.639082	0.729348	0.543800	-0.373374	0.030488	-1.433951	0.551405
1.36	192.360192	0.732853	0.529128	-0.386934	0.023860	-1.474843	0.562713
1.37	264.529968	0.735963	0.514349	-0.400351	0.017652	-1.510240	0.574563
1.40	395.395126	0.738798	0.499499	-0.413672	0.012001	-1.538521	0.586953
1.42	678.666951	0.741478	0.484627	-0.426958	0.007107	-1.557750	0.599865
1.44	1518.112197	0.744119	0.469791	-0.440279	0.003236	-1.567173	0.613282
1.45	2784.829801	0.745453	0.462404	-0.446974	0.001782	-1.569089	0.620183

ตารางที่ ช.47 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.15$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	9.471844	0.238513	0.736743	-0.059857	0.141688	-0.361726	0.033377
1.04	14.233374	0.329603	0.723638	-0.087693	0.133356	-0.513714	0.046762
1.06	18.611553	0.394350	0.710592	-0.110811	0.124987	-0.632109	0.056595
1.08	23.062802	0.444742	0.697532	-0.131561	0.116573	-0.733570	0.064462
1.10	27.827278	0.485584	0.684399	-0.150792	0.108108	-0.824486	0.071004
1.12	33.104908	0.519437	0.671149	-0.168914	0.099595	-0.908067	0.076579
1.14	39.111536	0.547890	0.657748	-0.186160	0.091043	-0.986140	0.081421
1.16	46.116963	0.572030	0.644172	-0.202680	0.082466	-1.059814	0.085697
1.18	54.489446	0.592652	0.630406	-0.218575	0.073886	-1.129765	0.089540
1.20	64.763963	0.610366	0.616442	-0.233924	0.065329	-1.196380	0.093054
1.22	77.760978	0.625658	0.602279	-0.248787	0.056828	-1.259821	0.096324
1.24	94.810922	0.638926	0.587920	-0.263216	0.048426	-1.320040	0.099422
1.26	118.213461	0.650506	0.573375	-0.277260	0.040174	-1.376748	0.102406
1.28	152.266319	0.660693	0.558661	-0.290968	0.032144	-1.429326	0.105327
1.30	205.843612	0.669761	0.543805	-0.304396	0.024437	-1.476642	0.108228
1.32	299.879478	0.677980	0.528852	-0.317621	0.017211	-1.516771	0.111152
1.34	494.128767	0.685640	0.513870	-0.330752	0.010716	-1.546807	0.114141
1.36	1021.997008	0.693042	0.498954	-0.343930	0.005325	-1.563859	0.117241

ตารางที่ ช.48 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.15$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	9.904003	0.226620	0.736008	-0.056514	0.141342	-0.369846	0.003513
1.04	14.904701	0.314182	0.722212	-0.083043	0.132664	-0.525281	0.004959
1.06	19.519409	0.377094	0.708530	-0.105227	0.123960	-0.646271	0.006044
1.08	24.229488	0.426591	0.694892	-0.125252	0.115223	-0.749817	0.006929
1.10	29.294607	0.467143	0.681238	-0.143897	0.106454	-0.842446	0.007677
1.12	34.937984	0.501114	0.667523	-0.161533	0.097658	-0.927445	0.008325
1.14	41.407962	0.529964	0.653709	-0.178367	0.088843	-1.006693	0.008895
1.16	49.023142	0.554687	0.639766	-0.194526	0.080026	-1.081335	0.009404
1.18	58.228972	0.576012	0.625674	-0.210100	0.071225	-1.152070	0.009865
1.20	69.688797	0.594501	0.611419	-0.225153	0.062468	-1.219288	0.010289
1.22	84.448740	0.610606	0.596996	-0.239739	0.053789	-1.283129	0.010685
1.24	104.262721	0.624704	0.582404	-0.253905	0.045233	-1.343484	0.011060
1.26	132.290983	0.637123	0.567651	-0.267695	0.036859	-1.399936	0.011422
1.28	174.763357	0.648160	0.552755	-0.281163	0.028753	-1.451622	0.011775
1.30	245.491164	0.658107	0.537749	-0.294376	0.021047	-1.496980	0.012125
1.32	380.481240	0.667270	0.522688	-0.307432	0.013950	-1.533426	0.012479
1.34	699.977118	0.675988	0.507659	-0.320469	0.007797	-1.557542	0.012843
1.36	1843.101270	0.684586	0.492771	-0.333654	0.003055	-1.567924	0.013225

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ตารางที่ ช.49 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.25$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	3.888835	0.304145	0.741614	-0.078301	0.243142	-0.262258	0.221075
1.04	5.838174	0.413474	0.732816	-0.112690	0.235952	-0.376046	0.299942
1.06	7.628580	0.487150	0.723547	-0.140176	0.228377	-0.467536	0.352266
1.08	9.436656	0.541486	0.713769	-0.164113	0.220385	-0.548463	0.389995
1.10	11.338545	0.583155	0.703461	-0.185769	0.211961	-0.623168	0.418154
1.12	13.379210	0.615778	0.692627	-0.205785	0.203115	-0.693674	0.439613
1.14	15.590648	0.641641	0.681282	-0.224549	0.193876	-0.760994	0.456291
1.16	17.999776	0.662322	0.669460	-0.242325	0.184286	-0.825640	0.469592
1.18	20.633430	0.678977	0.657200	-0.259302	0.174402	-0.887858	0.480581
1.20	23.522406	0.692477	0.644546	-0.275626	0.164284	-0.947753	0.490077
1.22	26.705243	0.703487	0.631541	-0.291409	0.153995	-1.005361	0.498705
1.24	30.232174	0.712526	0.618226	-0.306740	0.143597	-1.060682	0.506936
1.26	34.169773	0.719994	0.604638	-0.321691	0.133149	-1.113698	0.515120
1.28	38.606963	0.726204	0.590808	-0.336315	0.122706	-1.164383	0.523513
1.30	43.663421	0.731404	0.576765	-0.350659	0.112320	-1.212696	0.532297
1.32	49.501898	0.735785	0.562531	-0.364756	0.102040	-1.258584	0.541603
1.34	56.346964	0.739502	0.548126	-0.378636	0.091913	-1.301973	0.551517
1.36	64.514465	0.742678	0.533568	-0.392322	0.081982	-1.342767	0.562096
1.37	74.459342	0.745413	0.518871	-0.405833	0.072293	-1.380836	0.573376
1.40	86.856193	0.747787	0.504051	-0.419188	0.062890	-1.416011	0.585374
1.42	102.740989	0.749870	0.489120	-0.432403	0.053822	-1.448077	0.598098
1.44	123.773574	0.751720	0.474093	-0.445494	0.045141	-1.476770	0.611548
1.46	152.755653	0.753388	0.458984	-0.458479	0.036907	-1.501780	0.625723
1.48	194.737384	0.754919	0.443809	-0.471377	0.029188	-1.522784	0.640621
1.50	259.637191	0.756353	0.428588	-0.484208	0.022066	-1.539512	0.656248
1.52	369.358927	0.757727	0.413341	-0.496997	0.015640	-1.551894	0.672622
1.54	581.255548	0.759074	0.398088	-0.509770	0.010032	-1.560271	0.689781
1.56	1092.178779	0.760427	0.382858	-0.522559	0.005398	-1.565562	0.707790

ตารางที่ ช.50 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.25$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	6.042664	0.247294	0.737215	-0.061879	0.239945	-0.326189	0.035836
1.04	8.958083	0.341620	0.724579	-0.090580	0.229799	-0.462745	0.050067
1.06	11.540214	0.408572	0.711996	-0.114374	0.219538	-0.568824	0.060421
1.08	14.063816	0.460586	0.699388	-0.135701	0.209147	-0.659520	0.068617
1.10	16.651106	0.502644	0.686694	-0.155445	0.198614	-0.740641	0.075353
1.12	19.382169	0.537401	0.673867	-0.174035	0.187934	-0.815113	0.081020
1.14	22.324264	0.566505	0.660872	-0.191715	0.177111	-0.884616	0.085873
1.16	25.544472	0.591088	0.647684	-0.208641	0.166153	-0.950181	0.090102
1.18	29.118002	0.611979	0.634289	-0.224925	0.155076	-1.012460	0.093852
1.20	33.136065	0.629815	0.620680	-0.240646	0.143903	-1.071864	0.097241
1.22	37.715355	0.645105	0.606854	-0.255870	0.132660	-1.128639	0.100367
1.24	43.011098	0.658263	0.592815	-0.270650	0.121380	-1.182909	0.103309
1.26	49.236405	0.669632	0.578572	-0.285031	0.110102	-1.234702	0.106134
1.28	56.692511	0.679501	0.564133	-0.299052	0.098867	-1.283957	0.108895
1.30	65.818226	0.688115	0.549513	-0.312751	0.087724	-1.330534	0.111638
1.32	77.274512	0.695683	0.534727	-0.326161	0.076726	-1.374200	0.114399
1.34	92.096538	0.702388	0.519795	-0.339319	0.065938	-1.414623	0.117210
1.36	111.983282	0.708391	0.504739	-0.352260	0.055433	-1.451353	0.120097
1.37	139.889234	0.713835	0.489586	-0.365026	0.045303	-1.483821	0.123086
1.40	181.345566	0.718850	0.474370	-0.377664	0.035658	-1.511366	0.126199
1.42	247.775730	0.723554	0.459127	-0.390230	0.026637	-1.533332	0.129463
1.44	366.269067	0.728052	0.443902	-0.402783	0.018415	-1.549332	0.132908
1.46	616.044257	0.732440	0.428743	-0.415394	0.011215	-1.559700	0.136573
1.47	865.499628	0.734621	0.421207	-0.421748	0.008089	-1.563189	0.138504

ตารางที่ ช.51 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.25$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	6.343982	0.235303	0.736440	-0.058477	0.239545	-0.333786	0.003792
1.04	9.407261	0.326191	0.723086	-0.085877	0.228996	-0.473496	0.005340
1.06	12.120415	0.391448	0.709849	-0.108761	0.218340	-0.581893	0.006490
1.08	14.772222	0.442730	0.696654	-0.129398	0.207568	-0.674398	0.007420
1.10	17.492483	0.484668	0.683440	-0.148597	0.196674	-0.756953	0.008199
1.12	20.367926	0.519715	0.670156	-0.166747	0.185657	-0.832560	0.008865
1.14	23.473159	0.549382	0.656761	-0.184062	0.174519	-0.902955	0.009444
1.16	26.884328	0.574704	0.643226	-0.200680	0.163270	-0.969212	0.009956
1.18	30.688457	0.596438	0.629528	-0.216693	0.151924	-1.032018	0.010413
1.20	34.992744	0.615173	0.615653	-0.232171	0.140500	-1.091810	0.010830
1.22	39.936234	0.631380	0.601595	-0.247169	0.129025	-1.148850	0.011216
1.24	45.706424	0.645448	0.587350	-0.261732	0.117528	-1.203265	0.011579
1.26	52.564600	0.657704	0.572921	-0.275901	0.106048	-1.255078	0.011927
1.28	60.886511	0.668429	0.558316	-0.289712	0.094627	-1.304207	0.012266
1.30	71.230767	0.677865	0.543546	-0.303199	0.083315	-1.350472	0.012601
1.32	84.459555	0.686223	0.528626	-0.316399	0.072170	-1.393583	0.012937
1.34	101.963724	0.693691	0.513576	-0.329349	0.061265	-1.433125	0.013278
1.36	126.110875	0.700439	0.498420	-0.342090	0.050684	-1.468552	0.013626
1.37	161.213224	0.706621	0.483190	-0.354672	0.040536	-1.499185	0.013987
1.40	215.851335	0.712377	0.467923	-0.367149	0.030953	-1.524292	0.014363
1.42	309.313191	0.717836	0.452661	-0.379586	0.022105	-1.543279	0.014760
1.44	493.496596	0.723110	0.437455	-0.392056	0.014207	-1.556108	0.015181
1.46	955.550222	0.728306	0.422363	-0.404644	0.007549	-1.563849	0.015634

ตารางที่ ช.52 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.35$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	2.930904	0.311600	0.742163	-0.080087	0.342808	-0.237241	0.233141
1.04	4.404481	0.423756	0.733904	-0.115228	0.335231	-0.340131	0.316150
1.06	5.764820	0.499417	0.725160	-0.143304	0.327210	-0.422909	0.370963
1.08	7.146388	0.555232	0.715887	-0.167743	0.318697	-0.496254	0.410085
1.10	8.606173	0.597981	0.706057	-0.189835	0.309665	-0.564139	0.438748
1.12	10.174842	0.631335	0.695661	-0.210231	0.300108	-0.628412	0.459946
1.14	11.869501	0.657616	0.684711	-0.229323	0.290042	-0.689982	0.475723
1.16	13.699046	0.678450	0.673236	-0.247379	0.279507	-0.749277	0.487624
1.18	15.667704	0.695040	0.661280	-0.264598	0.268553	-0.806477	0.496861
1.20	17.777993	0.708308	0.648892	-0.281134	0.257245	-0.861637	0.504396
1.22	20.033228	0.718972	0.636123	-0.297108	0.245648	-0.914758	0.510976
1.24	22.439541	0.727589	0.623020	-0.312618	0.233825	-0.965831	0.517173
1.26	25.007464	0.734593	0.609628	-0.327741	0.221839	-1.014845	0.523410
1.28	27.753241	0.740322	0.595984	-0.342538	0.209747	-1.061798	0.529993
1.30	30.700077	0.745036	0.582119	-0.357056	0.197600	-1.106695	0.537140
1.32	33.879540	0.748940	0.568059	-0.371331	0.185447	-1.149541	0.545002
1.34	37.333348	0.752193	0.553825	-0.385394	0.173332	-1.190344	0.553678
1.36	41.115786	0.754918	0.539433	-0.399265	0.161296	-1.229108	0.563234
1.37	45.297085	0.757213	0.524898	-0.412962	0.149379	-1.265832	0.573706
1.40	49.968205	0.759157	0.510229	-0.426498	0.137617	-1.300509	0.585117
1.42	55.247721	0.760810	0.495437	-0.439883	0.126047	-1.333123	0.597472
1.44	61.291867	0.762224	0.480527	-0.453125	0.114702	-1.363653	0.610772
1.46	68.309493	0.763439	0.465507	-0.466230	0.103618	-1.392071	0.625010
1.48	76.584814	0.764488	0.450380	-0.479204	0.092827	-1.418340	0.640179
1.50	86.513000	0.765397	0.435151	-0.492048	0.082365	-1.442422	0.656269
1.52	98.657625	0.766192	0.419824	-0.504768	0.072265	-1.464277	0.673273
1.54	113.847002	0.766889	0.404403	-0.517365	0.062566	-1.483873	0.691188
1.56	133.343180	0.767507	0.388892	-0.529842	0.053304	-1.501188	0.710015
1.58	159.154600	0.768059	0.373294	-0.542201	0.044522	-1.516228	0.729764
1.60	194.654064	0.768558	0.357613	-0.554445	0.036265	-1.529040	0.750454
1.62	245.903223	0.769016	0.341853	-0.566576	0.028587	-1.539731	0.772117
1.64	324.802134	0.769443	0.326020	-0.578600	0.021549	-1.548483	0.794803
1.66	457.687348	0.769851	0.310121	-0.590521	0.015229	-1.555554	0.818585

ตารางที่ ช.53 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.35$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	4.773350	0.259152	0.737862	-0.064538	0.339629	-0.297656	0.039723
1.04	7.039217	0.357897	0.725871	-0.094374	0.329110	-0.421598	0.055330
1.06	9.018993	0.427886	0.713926	-0.119055	0.318415	-0.517493	0.066561
1.08	10.927212	0.482142	0.701941	-0.141139	0.307523	-0.599220	0.075338
1.10	12.853513	0.525871	0.689851	-0.161553	0.296416	-0.672143	0.082443
1.12	14.849907	0.561846	0.677604	-0.180750	0.285081	-0.738978	0.088313
1.14	16.952978	0.591790	0.665163	-0.198987	0.273513	-0.801295	0.093242
1.16	19.192377	0.616888	0.652500	-0.216431	0.261711	-0.860065	0.097445
1.18	21.595222	0.638017	0.639602	-0.233201	0.249685	-0.915915	0.101093
1.20	24.189149	0.655857	0.626459	-0.249384	0.237446	-0.969251	0.104329
1.22	27.005019	0.670956	0.613074	-0.265050	0.225016	-1.020336	0.107268
1.24	30.079723	0.683764	0.599450	-0.280257	0.212420	-1.069335	0.110007
1.26	33.459388	0.694655	0.585596	-0.295053	0.199684	-1.116344	0.112626
1.28	37.203322	0.703943	0.571524	-0.309478	0.186843	-1.161409	0.115190
1.30	41.389122	0.711890	0.557245	-0.323568	0.173930	-1.204534	0.117754
1.32	46.119643	0.718717	0.542774	-0.337352	0.160981	-1.245694	0.120358
1.34	51.532899	0.724610	0.528122	-0.350856	0.148037	-1.284837	0.123037
1.36	57.816682	0.729724	0.513306	-0.364104	0.135138	-1.321883	0.125818
1.37	65.230855	0.734191	0.498338	-0.377118	0.122327	-1.356730	0.128722
1.40	74.142538	0.738122	0.483232	-0.389918	0.109652	-1.389251	0.131768
1.42	85.083703	0.741610	0.468005	-0.402523	0.097163	-1.419302	0.134971
1.44	98.849414	0.744736	0.452672	-0.414954	0.084915	-1.446720	0.138346
1.46	116.673806	0.747567	0.437250	-0.427233	0.072971	-1.471345	0.141907
1.48	140.564365	0.750162	0.421757	-0.439381	0.061400	-1.493031	0.145672
1.50	173.984541	0.752571	0.406213	-0.451424	0.050283	-1.511684	0.149660
1.52	223.380427	0.754841	0.390642	-0.463390	0.039718	-1.527309	0.153896
1.54	302.024494	0.757010	0.375068	-0.475314	0.029824	-1.540062	0.158414
1.55	360.742068	0.758070	0.367290	-0.481272	0.025175	-1.545464	0.160792

ตารางที่ ช.54 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.35$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	5.047759	0.247061	0.737032	-0.061050	0.339220	-0.305284	0.004239
1.04	7.439009	0.342518	0.724285	-0.089593	0.328289	-0.432295	0.005953
1.06	9.522271	0.411024	0.711662	-0.113395	0.317192	-0.530373	0.007216
1.08	11.524124	0.464788	0.699080	-0.134832	0.305915	-0.613735	0.008225
1.10	13.539698	0.508648	0.686472	-0.154755	0.294445	-0.687883	0.009059
1.12	15.624953	0.545160	0.673781	-0.173569	0.282775	-0.755620	0.009763
1.14	17.820171	0.575900	0.660961	-0.191504	0.270897	-0.818577	0.010364
1.16	20.158946	0.601950	0.647980	-0.208703	0.258813	-0.877780	0.010886
1.18	22.672846	0.624112	0.634811	-0.225268	0.246528	-0.933898	0.011345
1.20	25.394682	0.643010	0.621441	-0.241272	0.234051	-0.987374	0.011756
1.22	28.361473	0.659153	0.607861	-0.256775	0.221399	-1.038503	0.012132
1.24	31.617641	0.672964	0.594068	-0.271826	0.208592	-1.087471	0.012482
1.26	35.218807	0.684803	0.580066	-0.286467	0.195656	-1.134389	0.012816
1.28	39.236620	0.694973	0.565860	-0.300733	0.182618	-1.179307	0.013142
1.30	43.765219	0.703736	0.551459	-0.314657	0.169513	-1.222234	0.013465
1.32	48.930248	0.711313	0.536874	-0.328267	0.156375	-1.263136	0.013790
1.34	54.901970	0.717894	0.522116	-0.341588	0.143244	-1.301949	0.014121
1.36	61.915022	0.723641	0.507199	-0.354644	0.130160	-1.338577	0.014463
1.37	70.299247	0.728692	0.492137	-0.367457	0.117171	-1.372895	0.014817
1.40	80.529614	0.733164	0.476946	-0.380049	0.104325	-1.404752	0.015187
1.42	93.310389	0.737159	0.461641	-0.392443	0.091678	-1.433979	0.015574
1.44	109.723902	0.740762	0.446240	-0.404662	0.079291	-1.460395	0.015982
1.46	131.508680	0.744048	0.430763	-0.416731	0.067236	-1.483827	0.016413
1.48	161.616435	0.747081	0.415231	-0.428676	0.055592	-1.504146	0.016868
1.50	205.427432	0.749916	0.399667	-0.440529	0.044458	-1.521305	0.017353
1.52	273.713180	0.752603	0.384098	-0.452324	0.033951	-1.535407	0.017871
1.54	391.019130	0.755190	0.368558	-0.464106	0.024224	-1.546754	0.018429

ตารางที่ ช.55 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.50$ และค่า $\bar{K} = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.12	8.740980	0.660185	0.701340	-0.218187	0.452257	-0.540955	0.510985
1.14	10.487404	0.687557	0.691221	-0.237980	0.442299	-0.594832	0.525742
1.16	12.457430	0.708799	0.680481	-0.256635	0.431722	-0.647101	0.534961
1.18	14.648036	0.725186	0.669155	-0.274357	0.420569	-0.697785	0.540191
1.20	17.042112	0.737761	0.657302	-0.291315	0.408901	-0.746776	0.542815
1.22	19.613083	0.747382	0.644988	-0.307653	0.396793	-0.793950	0.544013
1.24	22.330143	0.754743	0.632284	-0.323491	0.384318	-0.839223	0.544723
1.26	25.162575	0.760388	0.619252	-0.338926	0.371545	-0.882571	0.545653
1.28	28.082576	0.764735	0.605946	-0.354032	0.358533	-0.924022	0.547306
1.30	31.066780	0.768102	0.592409	-0.368867	0.345331	-0.963638	0.550027
1.32	34.096927	0.770725	0.578674	-0.383472	0.331985	-1.001502	0.554045
1.34	37.160061	0.772781	0.564766	-0.397881	0.318532	-1.037700	0.559502
1.36	40.248496	0.774401	0.550705	-0.412115	0.305006	-1.072318	0.566485
1.38	43.359696	0.775686	0.536504	-0.426191	0.291441	-1.105434	0.575039
1.40	46.496125	0.776707	0.522172	-0.440119	0.277866	-1.137117	0.585183
1.42	49.665111	0.777521	0.507716	-0.453907	0.264311	-1.167426	0.596918
1.44	52.878759	0.778169	0.493141	-0.467558	0.250805	-1.196411	0.610232
1.46	56.153935	0.778685	0.478447	-0.481073	0.237376	-1.224114	0.625105
1.48	59.512377	0.779091	0.463635	-0.494452	0.224052	-1.250569	0.641509
1.50	62.980982	0.779407	0.448703	-0.507691	0.210860	-1.275805	0.659412
1.52	66.592339	0.779646	0.433648	-0.520785	0.197828	-1.299849	0.678777
1.54	70.385619	0.779819	0.418466	-0.533727	0.184980	-1.322725	0.699565
1.56	74.407945	0.779934	0.403151	-0.546508	0.172341	-1.344453	0.721733
1.58	78.716489	0.779996	0.387696	-0.559118	0.159935	-1.365058	0.745234
1.60	83.381592	0.780009	0.372093	-0.571544	0.147782	-1.384564	0.770017
1.62	88.491410	0.779976	0.356333	-0.583773	0.135903	-1.402995	0.796025
1.64	94.158914	0.779898	0.340405	-0.595785	0.124312	-1.420381	0.823199
1.66	100.532539	0.779773	0.324297	-0.607564	0.113024	-1.436752	0.851470
1.68	107.812742	0.779601	0.307996	-0.619087	0.102049	-1.452143	0.880767
1.70	116.278292	0.779380	0.291488	-0.630331	0.091395	-1.466590	0.911010
1.72	126.329498	0.779106	0.274757	-0.641269	0.081066	-1.480130	0.942115
1.74	138.561841	0.778775	0.257790	-0.651874	0.071064	-1.492804	0.973995
1.76	153.897594	0.778383	0.240570	-0.662116	0.061390	-1.504649	1.006567
1.78	173.835290	0.777926	0.223084	-0.671966	0.052048	-1.515700	1.039758
1.80	200.958907	0.777399	0.205320	-0.681395	0.043046	-1.525988	1.073519
1.81	218.574683	0.777109	0.196331	-0.685943	0.038678	-1.530852	1.090609

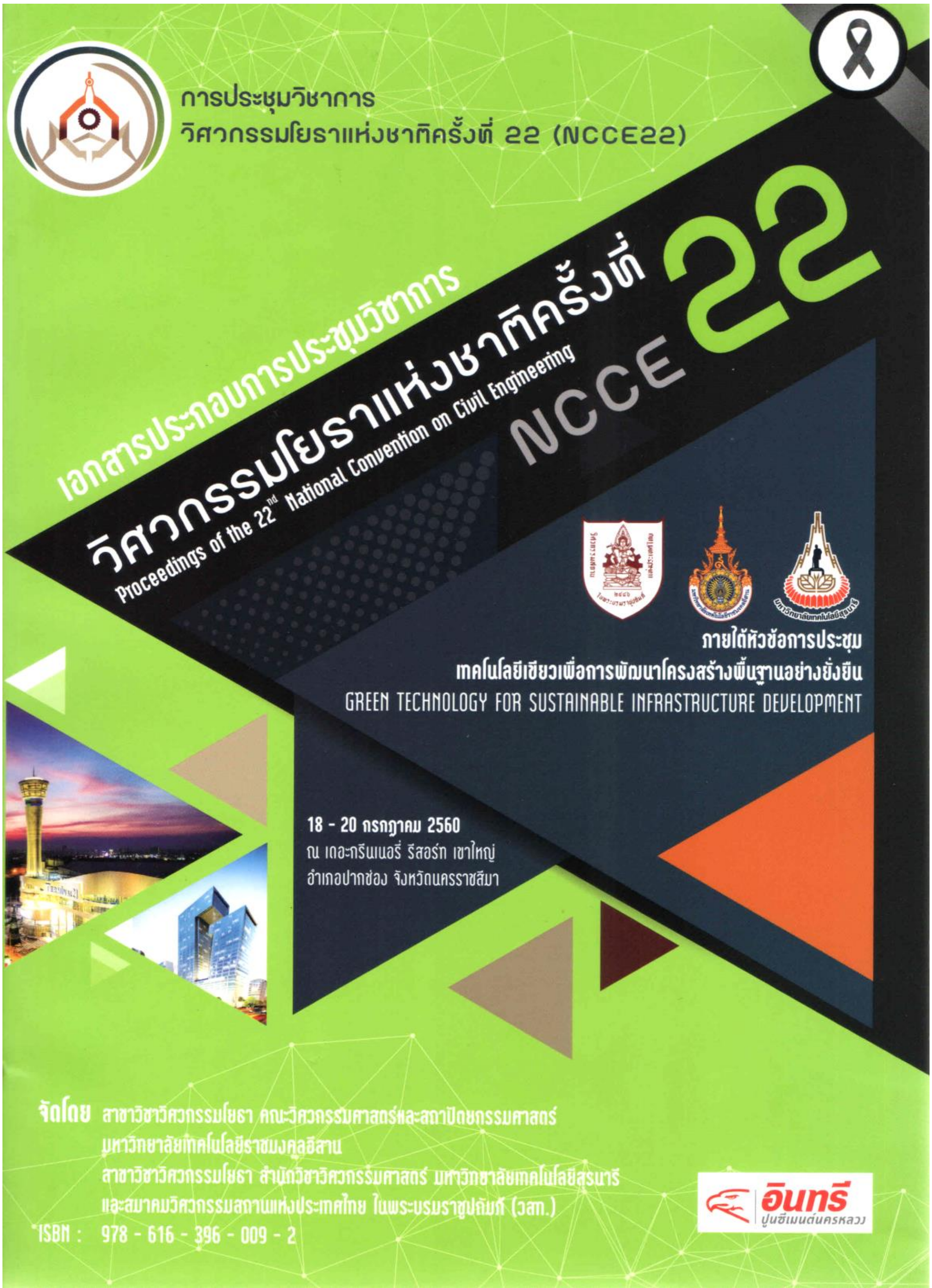
ตารางที่ ช.56 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.50$ และค่า $\bar{K} = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	4.199286	0.282571	0.739159	-0.069523	0.490403	-0.263141	0.049559
1.04	6.231495	0.390267	0.728473	-0.101494	0.480642	-0.371197	0.068821
1.06	8.050178	0.466539	0.717827	-0.127853	0.470681	-0.453865	0.082520
1.08	9.852946	0.525497	0.707125	-0.151378	0.460488	-0.523623	0.093054
1.10	11.727801	0.572730	0.696287	-0.173078	0.450034	-0.585342	0.101392
1.12	13.727814	0.611179	0.685249	-0.193445	0.439291	-0.641520	0.108072
1.14	15.888360	0.642662	0.673961	-0.212758	0.428236	-0.693620	0.113456
1.16	18.232136	0.668446	0.662387	-0.231201	0.416853	-0.742564	0.117823
1.18	20.770857	0.689496	0.650506	-0.248905	0.405136	-0.788955	0.121408
1.20	23.506497	0.706605	0.638311	-0.265970	0.393086	-0.833200	0.124414
1.22	26.433142	0.720444	0.625806	-0.282479	0.380711	-0.875576	0.127019
1.24	29.539613	0.731595	0.613002	-0.298500	0.368026	-0.916283	0.129376
1.26	32.812523	0.740557	0.599915	-0.314091	0.355051	-0.955464	0.131613
1.28	36.239320	0.747750	0.586563	-0.329299	0.341809	-0.993232	0.133833
1.30	39.810969	0.753527	0.572966	-0.344164	0.328325	-1.029674	0.136118
1.32	43.524124	0.758174	0.559140	-0.358716	0.314624	-1.064861	0.138530
1.34	47.382869	0.761923	0.545100	-0.372981	0.300730	-1.098849	0.141116
1.36	51.400158	0.764959	0.530860	-0.386978	0.286670	-1.131683	0.143910
1.37	55.599194	0.767428	0.516432	-0.400723	0.272469	-1.163394	0.146937
1.40	60.014940	0.769447	0.501825	-0.414228	0.258152	-1.194004	0.150213
1.42	64.696032	0.771106	0.487047	-0.427502	0.243746	-1.223525	0.153751
1.44	69.707376	0.772477	0.472107	-0.440551	0.229276	-1.251963	0.157557
1.46	75.133811	0.773616	0.457011	-0.453381	0.214770	-1.279314	0.161635
1.48	81.085346	0.774570	0.441764	-0.465995	0.200255	-1.305570	0.165990
1.50	87.704816	0.775373	0.426374	-0.478397	0.185762	-1.330717	0.170624
1.52	95.179150	0.776054	0.410844	-0.490588	0.171319	-1.354741	0.175537
1.54	103.756292	0.776637	0.395183	-0.502570	0.156960	-1.377623	0.180733
1.56	113.771061	0.777140	0.379395	-0.514347	0.142719	-1.399348	0.186216
1.58	125.685841	0.777579	0.363488	-0.525919	0.128633	-1.419902	0.191993
1.60	140.156545	0.777968	0.347469	-0.537290	0.114740	-1.439277	0.198072
1.62	158.143682	0.778317	0.331347	-0.548463	0.101087	-1.457471	0.204468

ตารางที่ ช.57 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_B, \bar{x}_D, \bar{y}_D, \overline{x^*}, \theta_A, \Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 $(\alpha > \beta)$
โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75,\ \beta = 0.50$ และค่า $\bar{K} = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	θ_B	$\bar{x}_D$	$\bar{y}_D$	$\overline{x^*}$	θ_A	$\Delta\theta$
1.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.02	4.529221	0.270591	0.738223	-0.065869	0.489977	-0.271839	0.005404
1.04	6.709722	0.375459	0.726709	-0.096567	0.479801	-0.383187	0.007573
1.06	8.648763	0.450807	0.715348	-0.122111	0.469448	-0.468033	0.009157
1.08	10.558039	0.509865	0.704040	-0.145077	0.458895	-0.539260	0.010409
1.10	12.531435	0.557816	0.692701	-0.166388	0.448117	-0.601910	0.011427
1.12	14.625841	0.597355	0.681258	-0.186485	0.437090	-0.658588	0.012267
1.14	16.879968	0.630135	0.669649	-0.205615	0.425793	-0.710842	0.012965
1.16	19.319875	0.657299	0.657828	-0.223938	0.414207	-0.759671	0.013551
1.18	21.960738	0.679724	0.645760	-0.241563	0.402321	-0.805751	0.014049
1.20	24.807955	0.698137	0.633424	-0.258577	0.390127	-0.849551	0.014479
1.22	27.858808	0.713169	0.620811	-0.275048	0.377627	-0.891408	0.014861
1.24	31.104987	0.725381	0.607923	-0.291035	0.364830	-0.931561	0.015210
1.26	34.535715	0.735265	0.594766	-0.306588	0.351748	-0.970191	0.015542
1.28	38.141016	0.743249	0.581352	-0.321747	0.338399	-1.007432	0.015868
1.30	41.914716	0.749694	0.567694	-0.336548	0.324801	-1.043386	0.016197
1.32	45.856985	0.754903	0.553806	-0.351021	0.310978	-1.078131	0.016536
1.34	49.976442	0.759123	0.539702	-0.365186	0.296950	-1.111726	0.016891
1.36	54.291994	0.762554	0.525394	-0.379065	0.282743	-1.144212	0.017266
1.37	58.834653	0.765356	0.510892	-0.392671	0.268379	-1.175618	0.017664
1.40	63.649612	0.767655	0.496207	-0.406016	0.253884	-1.205960	0.018088
1.42	68.798923	0.769554	0.481348	-0.419110	0.239283	-1.235243	0.018540
1.44	74.365158	0.771130	0.466323	-0.431959	0.224601	-1.263466	0.019019
1.46	80.456626	0.772449	0.451140	-0.444571	0.209868	-1.290616	0.019529
1.48	87.214948	0.773560	0.435807	-0.456950	0.195110	-1.316679	0.020068
1.50	94.826223	0.774503	0.420332	-0.469101	0.180359	-1.341635	0.020639
1.52	103.537729	0.775312	0.404722	-0.481028	0.165646	-1.365461	0.021242
1.54	113.683531	0.776011	0.388987	-0.492734	0.151007	-1.388137	0.021878
1.56	125.724670	0.776624	0.373134	-0.504224	0.136477	-1.409645	0.022549
1.58	140.314122	0.777167	0.357175	-0.515504	0.122099	-1.429969	0.023255
1.59	148.846452	0.777417	0.349158	-0.521067	0.114981	-1.439685	0.023623

ภาคผนวก ซ
ผลงานตีพิมพ์เผยแพร่


การประชุมวิชาการ
วิศวกรรมโยธาแห่งชาติครั้งที่ 22 (NCCE22)
เอกสารประกอบการประชุมวิชาการ
วิศวกรรมโยธาแห่งชาติครั้งที่
Proceedings of the 22nd National Convention on Civil Engineering
NCCE 22
ภายใต้หัวข้อการประชุม
เทคโนโลยีเขียวเพื่อการพัฒนาโครงสร้างพื้นฐานอย่างยั่งยืน
GREEN TECHNOLOGY FOR SUSTAINABLE INFRASTRUCTURE DEVELOPMENT
18 - 20 กรกฎาคม 2560
ณ เดอะกรีนเนอรี่ รีสอร์ท เขาใหญ่
อำเภอปากช่อง จังหวัดนครราชสีมา
จัดโดย สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน
สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
และสมาคมวิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ (วสท.)
ISBN : 978 - 616 - 396 - 009 - 2
อินทรี
ปูนซีเมนต์นครหลวง

การประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ ๒๒

“เทคโนโลยีเขียวเพื่อการพัฒนาโครงสร้างพื้นฐานอย่างยั่งยืน”

ขอมอบเกียรติบัตรฉบับนี้เพื่อแสดงว่า

มานะชัย สุวรรณ และ บุญชัย ผึ้งไผ่งาม

ได้เข้าร่วมประชุมและเสนอบทความ

ผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุด

ระหว่างวันที่ ๑๘ - ๒๐ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๖๐

ณ เดอะกรีนเนอรี่ รีสอร์ท อ.ปากช่อง จ.นครราชสีมา

ได้รับการรับรองจากสภาวิศวกรให้มีจำนวนหน่วยพัฒนา ๑๒ หน่วย รหัสกิจกรรม ๓๐๑-๐๑-๒๐๐๑-๐๐/๖๐๐๗-๐๐๔

(ดร.ธเนศ วีระศิริ)
นายกวิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
ประจำปี พ.ศ. ๒๕๖๐-๒๕๖๒

(รองศาสตราจารย์ เอนก ศิริพานิชกร)
ประธานกรรมการกลางจัดประชุมวิชาการ
วิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ ๒๒

เอกสารประกอบการประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22
PROCEEDINGS OF THE 22nd NATIONAL CONVENTION ON CIVIL ENGINEERING

"เทคโนโลยีเขียวเพื่อการพัฒนาโครงสร้างพื้นฐานอย่างยั่งยืน"
GREEN TECHNOLOGY FOR SUSTAINABLE INFRASTRUCTURE DEVELOPMENT

VOLUME 1:
วิศวกรรมโครงสร้างและวิศวกรรมการบริหารงานก่อสร้าง
(Structural Engineeing & Construction Engineering and Management)

18-20 กรกฎาคม 2560
ณ เดอะกรีนเนอรี่ รีสอร์ท เขาใหญ่
อำเภอปากช่อง จังหวัดนครราชสีมา

จัดโดย

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน
สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
และสมาคมวิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ผู้สนับสนุนหลักอย่างเป็นทางการ

บริษัท ปูนซีเมนต์นครหลวง จำกัด (มหาชน)

กำหนดการประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22

ณ โรงแรม เดอะกรีนเนอรี่ รีสอร์ท เขาใหญ่ จังหวัดนครราชสีมา

18 - 20 กรกฎาคม 2560

วันจันทร์ ที่ 17 กรกฎาคม 2560

เวลา	รายละเอียด
17.00 – 20.00 น.	ลงทะเบียนการประชุม ณ ห้องประชุม Falcon 1

วันอังคาร ที่ 18 กรกฎาคม 2560

เวลา	รายละเอียด
8.00 – 10.00 น.	ลงทะเบียนการประชุม ณ ห้องประชุม Falcon 1
10.00 – 10.15 น.	**พิธีถวายราชสักการะและน้อมรำลึกในพระมหากรุณาธิคุณพระบารมี พระบาทสมเด็จพระปรมินทรมหาภูมิพลอดุลยเดชฯ****
10.15 – 11.00 น.	พิธีเปิด ณ ห้อง Falcon 1 - กล่าวรายงาน โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิระยุทธ สืบสุข (ประธานคณะอนุกรรมการจัดประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22) - กล่าวต้อนรับโดย รองศาสตราจารย์เอนก ศิริพานิชกร (ประธานคณะกรรมการกลางจัดประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22 และประธานคณะกรรมการสาขาวิศวกรรมโยธา วสท.) - กล่าวต้อนรับโดย รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ศักดิ์ ธรรมโชติ (คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน) - กล่าวเปิดการประชุมฯ โดยประธานพิธี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ้มไขแสง (อธิการบดีมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน) - พิธีมอบโล่ห์ผู้สนับสนุนการประชุมโดยประธานพิธี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ้มไขแสง (อธิการบดีมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน)
11.00 – 12.00 น.	การบรรยายพิเศษ เรื่อง " **วิศวกรรมโยธาตามแนวทางพระราชดำริ** " โดย รองศาสตราจารย์ ดร.การุญ จันทรางศุ
12.00 – 13.00 น.	พักรับประทานอาหารกลางวัน
13.00 - 13.45 น.	**การบรรยายพิเศษ โดย ศาสตราจารย์ ดร.เป็นหนึ่ง วานิชชัย** (สถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชีย) ณ ห้องประชุม Falcon 1
13.00 - 15.00 น.	การนำเสนอบทความวิชาการ **ช่วงที่ 1**
15.00 – 15.15 น.	พักรับประทานอาหารว่าง
15.15 – 16.00 น.	**การบรรยายพิเศษ โดย ศาสตราจารย์ ดร.สมนึก ตั้งเติมสิริกุล** (สถาบันเทคโนโลยีนานาชาติสิรินธร มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์) ณ ห้องประชุม Falcon 1
15.15 – 16.00 น.	**การบรรยายพิเศษ โดย รองศาสตราจารย์ เกษม เพชรเกตุ** (บริษัท เกษมดีไซน์ จำกัด) ณ ห้องประชุม Falcon 2
15.15 – 17.15 น.	การนำเสนอบทความวิชาการ **ช่วงที่ 2**
18.00 – 22.00 น.	งานเลี้ยงต้อนรับ ณ ห้องเลี้ยงรับรอง KYCC Grand Ballroom

*** ในพิธีถวายราชสักการะฯ ขอความร่วมมือในการแต่งกาย*

สุภาพบุรุษ : ขอความกรุณาสวมเสื้อมีปกสีขาวหรือดำ กางเกงขายาวสีดำ (งดเว้นกางเกงยีนส์) รองเท้าหุ้มส้นสีดำ

สุภาพสตรี : ขอความกรุณาสวมชุดสุภาพสีดำ มีแขน ไม่รัดรูป กระโปรงยาวคลุมเข่าหรือผ้าถุง (งดเว้นกระโปรงยีนส์) รองเท้าหุ้มส้นสีดำ

วันพุธ ที่ 19 กรกฎาคม 2560

เวลา	รายละเอียด
9.00 – 9.45 น.	**การบรรยายพิเศษ โดย ศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ ลิ่มกตัญญู** (มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์) ณ ห้องประชุม Falcon 1
9.00 – 9.45 น.	**การบรรยายพิเศษ โดย รองศาสตราจารย์ ดร.พนกฤษณ คลังบุญครอง** (มหาวิทยาลัยขอนแก่น) ณ ห้องประชุม Falcon 2
8.00 – 10.00 น.	การนำเสนอบทความวิชาการ **ช่วงที่ 3**
10.00 – 10.15 น.	พักรับประทานอาหารว่าง
10.15 – 11.00 น.	**การบรรยายพิเศษ โดย ศาสตราจารย์ ดร.ชัยยุทธ ชินณะราศรี** (มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี) ณ ห้องประชุม Falcon 1
10.45 – 12.15 น.	**การบรรยายพิเศษ Newton Fund – Low Carbon Cement and Concrete in Modern Construction Industry** ณ ห้องประชุม Falcon 2
10.15 – 12.15 น.	การนำเสนอบทความวิชาการ **ช่วงที่ 4**
12.15 – 13.15 น.	พักรับประทานอาหารกลางวัน
13.15 – 14.00 น.	**การบรรยายพิเศษ โดย ศาสตราจารย์ ดร.สุขสันติ์ หอพิบูลสุข** (มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี) ณ ห้องประชุม Falcon 1
13.15 – 14.00 น.	**การบรรยายพิเศษ โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรเชษฐ์ ประวีณวงศ์วุฒิ** (สถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชีย) ณ ห้องประชุม Falcon 2
13.15 – 15.15 น.	การนำเสนอบทความวิชาการ **ช่วงที่ 5**
15.15 – 15.30 น.	พักรับประทานอาหารว่าง
15.30 – 17.30 น.	การนำเสนอบทความวิชาการ **ช่วงที่ 6**

วันพฤหัสบดีที่ 20 กรกฎาคม 2560

เวลา	รายละเอียด
8.00 – 16.30 น.	ศึกษาดูงาน ท่องเที่ยวเชิงอนุรักษ์ธรรมชาติ อุทยานแห่งชาติเขาใหญ่ อ.ปากช่อง จ.นครราชสีมา

ผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุด

Effect of Rotational Spring Joint on Large Deflections Behavior of Variable - Arc - Length Beam Subjected to Point Load

มานะชัย สุวรรณ[1] และ บุญชัย ผึ้งไผ่งาม[2*]

[1,2]ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี คลองหก คลองหลวง ปทุมธานี 12110

[*]Corresponding author; boonchai_p@rmutt.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุด โดยที่ปลายด้านหนึ่งของคานเป็นจุดรองรับแบบหมุน ส่วนที่ปลายอีกด้านหนึ่งอยู่บนจุดรองรับที่เลื่อนได้โดยไร้แรงเสียดทาน ซึ่งมีจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงอยู่ในตำแหน่งเดียวกับแรงกระทำ สมการครอบคลุมของปัญหาจะประกอบด้วยความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้ง ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตและสมดุลของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริง ทำการหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการโดยใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้า ผลการศึกษาพบว่าแรงกระทำและความยาวส่วนโค้งของคานมีค่าที่เพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องและมีพฤติกรรมเป็นแบบมีเสถียรภาพเท่านั้น โดยที่การเพิ่มค่าสติฟเนสของสปริงทำให้พฤติกรรมของคานมีค่าเข้าใกล้กับคานที่มีความยาวต่อเนื่องกัน

คำสำคัญ: การแอ่นตัวมาก, ความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้, วิธีการยิงเป้า

Abstract

This paper presents the effect of rotational spring joint on large deflections behavior of variable - arc - length beam subjected to point load. One end is attached to the hinged support, while the other end is placed on the frictionless support. The rotational spring joint is located at the same position of the point load. The governing differential equations are formulated by the equilibrium equations, moment - curvature expression, and the geometric relations. Moreover, the equilibrium at the spring joint is taken into account. The shooting method is employed to compute the solutions. From the results, it is found that the load-deflection curve is increased monotonically and only stable behavior can be captured. By increasing the value of spring stiffness, the behavior of the beam is similar to the single portion VAL beam.

Keywords: large deflections, variable - arc - length beam, shooting method

1. บทนำ

พฤติกรรมการแอ่นตัวมากของโครงสร้างนั้น เป็นปัญหาทางอิลาสติคาที่มีสมการครอบคลุมปัญหาที่มีความไร้เชิงเส้นสูง ซึ่งโดยทั่วไปวิธีการแก้ปัญหาในลักษณะนี้สามารถกระทำได้โดย 3 วิธีหลักๆดังนี้ วิธีอิลิปติคอินทิกรัล วิธียิงการเป้าและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากการทบทวนวรรณกรรมที่ผ่านมามีผู้ที่ทำการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการแอ่นตัวมากของคานที่น่าสนใจไว้หลายรูปแบบ โดยมีการศึกษาเกี่ยวกับคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำในรูปแบบต่างๆ เช่น สุรพันธ์ [1] ได้ศึกษาการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายเลื่อนได้อย่างอิสระ การวิเคราะห์แบ่งออกเป็น 3 กรณี ได้แก่กรณีแรงกระทำที่จุดกึ่งกลางคาน กรณีโมเมนต์ดัดกระทำที่จุดรองรับแบบข้อหมุนและกรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายโดยใช้วิธีอิลิปติคอินทิกรัล และนำผลที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์แบบไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่าทั้งสองวิธีมีค่าที่ใกล้เคียงกัน ต่อมาในปี ค.ศ. 1994 Chucheepsakul และคณะ [2] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้โมเมนต์ดัดที่มีทิศทางตรงข้ามกันกระทำที่ปลายคานทั้งสองด้านและพิจารณาการแอ่นตัวของคานตามการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัดที่ปลายคานทั้งสอง โดยใช้วิธีการยิงเป้าและวิธีอีลิปติคอินทิกรัล โดยผลที่ได้นี้ปรากฏว่าทั้งสองวิธีมีค่าที่ใกล้เคียงกัน เช่นเดียวกับ Chucheepsakul และคณะ [3] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้โมเมนต์ดัดกระทำที่ปลายคาน โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีอีลิปติคอินทิกรัล ทั้งสองวิธีให้ค่าที่ใกล้เคียงกันมาก และผลจากการวิเคราะห์ด้วยวิธีอีลิปติคอินทิกรัลพบว่าค่าโมเมนต์ค่าหนึ่งจะเกิดสภาวะสมดุลได้สองรูปแบบ คือ สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพและไม่มีเสถียรภาพ และในปีเดียวกัน จีระพงษ์ [4] ได้ศึกษาการวิเคราะห์การ

แอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งของคานมีค่าไม่คงที่ โดยปลายข้างหนึ่งของคานเป็นจุดรองรับแบบข้อหมุน ส่วนอีกข้างหนึ่งพาดอยู่บนจุดรองรับไร้แรงเสียดทาน น้ำหนักบรรทุกที่กระทำบนคานแบ่งออกเป็น 4 กรณี ได้แก่ กรณีน้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำที่ตำแหน่งใดๆ กรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางตรงกันข้าม กรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางตรงกันข้ามและมีน้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำที่ตำแหน่งใดๆ และกรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางเดียวกัน ทำการแก้ปัญหาด้วยวิธีอิลิปติคอินทิกรัล จากการวิเคราะห์คานเมื่ออยู่ภายใต้น้ำหนักบรรทุกดังกล่าวสามารถหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤติและตำแหน่งสมดุลสถิตย์แบบเสถียรภาพและแบบไร้เสถียรภาพของคานได้ ต่อมาในปี ค.ศ. 1997 Wang และคณะ [5] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำ ณ ตำแหน่งใดๆ ตามแนวแกนราบของคาน วิเคราะห์และหาคำตอบด้วยวิธีการยิงเป้าและวิธีอิลิปติคอินทิกรัล ผลที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน โดยในบางงานวิจัยยังมีจุดรองรับที่แตกต่างกัน ทำให้พฤติกรรมของโครงสร้างมีความหลากหลาย ดังเช่นงานวิจัยของทินกร [6] ได้ศึกษาการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยคำนึงถึงผลการยึดรั้งและความเสียดทานของที่รองรับและผลของแรงเฉือน ซึ่งทำการศึกษาสภาวะการรับแรง 3 กรณี ซึ่งคานมีจุดรองรับแบบข้อหมุนยึดด้วยสปริงต้านการหมุนแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นที่ปลายข้างหนึ่ง ส่วนปลายคานอีกข้างหนึ่งพาดอยู่บนจุดรองรับแบบมีแรงเสียดทาน โดยใช้วิธีการยิงเป้าและวิธีอิลิปติคอินทิกรัล และในปี พ.ศ. 2542 (ค.ศ. 1999) Chucheepsakul และคณะ [7] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้โมเมนต์ดัดกระทำที่ปลายคานในทิศทางเดียวกัน และทำการหาคำตอบด้วยวิธีการยิงเป้าและวิธี อิลิปติคอินทิกรัล ผลการวิเคราะห์พบว่าเมื่อค่าสัดส่วนระหว่างโมเมนต์ดัดที่ปลายพาดผ่านจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานพบว่าเมื่อค่า β มีค่าเพิ่มขึ้นค่าโมเมนต์วิกฤติก็จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนงานวิจัยของบุญชัย [8] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบเอียงที่มีการเปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของคาน ที่ปลายด้านหนึ่งของคานเป็นจุดรองรับแบบหมุน และอีกด้านหนึ่งของคานยอมให้มีการเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระบนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน หาคำตอบด้วยวิธีอิลิปติคอินทิกรัลและวิธีการยิงเป้า ในปีต่อมา กอปร์ชัย [9] ได้ศึกษาวิธีการหาคำตอบทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้ระบบพิกัดลากรานจ์ นำเสนอวิธีการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีสมบัติอ่อนตัว และคานที่ทำการวิเคราะห์แบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท แก้ปัญหาด้วยวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์และใช้วิธีการกระทำซ้ำของ Newton - Raphson เพื่อหาคำตอบของสมการไร้เชิงเส้น ผลที่ได้นำมาตรวจสอบกับการวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้ระบบพิกัดออยเลอร์ พบว่ามีความถูกต้องใกล้เคียงกัน ในแต่ละงานวิจัยนั้นล้วนมีวิธีการศึกษาและวัสดุที่แตกต่างกันออกไปอย่างเช่นงานวิจัยของ นฤพนธ์ [10] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานที่ทำจากวัสดุแบบไม่เป็นเชิงเส้น โดยศึกษาสภาวะรับแรงอยู่ 3 ประเภท หาคำตอบด้วยวิธีการยิงเป้า ผลการวิเคราะห์พบว่าคานที่มีค่าคงที่ของวัสดุประเภทลุดวิก (n) ที่มีค่ามากคานจะแอ่นตัวมากว่าคานทีมีค่าคงที่ของวัสดุประเภทลุดวิก (n) ที่มีค่าน้อย และต่อมาในปี ค.ศ. 2006 Phungpaingam และคณะ [11] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานอย่างง่ายที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่เปลี่ยนแปลงตามการเสียรูปของคาน หาคำตอบด้วยวิธีการยิงเป้าและวิธีอิลิปติคอินทิกรัล ในปีเดียวกัน Pulngern และคณะ [12] ได้ศึกษาการแอ่นตัวของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ การหาคำตอบนั้นมี 3 วิธี คือ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีการยิงเป้าและทฤษฎีของคานแบบเชิงเส้น ซึ่งพบว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีการยิงเป้ามีค่าการแอ่นตัวที่จุดกึ่งกลางคานมากกว่าค่าที่ได้จากทฤษฎีของคานแบบเชิงเส้น ต่อมาในปี พ.ศ. 2551 (ค.ศ. 2008) Athisakul และ Chucheepsakul [13] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ หาคำตอบด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีการยิงเป้า พบว่าการยกหรือลดระดับของจุดรองรับมีผลต่อค่าน้ำหนักตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ เมื่อทำการยกระดับจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานค่าน้ำหนักตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ ณ สภาวะวิกฤติมีค่าเพิ่มขึ้น และหากลดระดับจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานค่าน้ำหนักตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ ณ สภาวะวิกฤติจะมีค่าลดลง กฤษณะชัย [14] ได้ศึกษาการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้วัสดุมีคุณสมบัติแบบไม่เป็นเชิงเส้น ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบต่างๆ คานมีจุดรองรับเป็นจุดยึดหมุนที่ปลายข้างหนึ่ง ส่วนปลายคานอีกข้างหนึ่งจะพาดผ่านจุดรองรับที่ไม่มีแรงเสียดทาน ความยาวช่วงของคานจะคงที่ ส่วนความยาวส่วนโค้งของคานจะแปรเปลี่ยนตามน้ำหนักที่มากระทำต่อคาน พิจาณาน้ำหนักบรรทุกที่มากระทำต่อคานทั้งหมด 3 ลักษณะ โดยใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้าในการหาคำตอบ ในการศึกษาพฤติกรรมการโก่งเดาะนั้นยังสามารถใช้โปรแกรมในการช่วยแก้ไขปัญหาดังปรากฏในงานวิจัยของ สุนทร [15] ได้ศึกษาถึงพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของคานอย่างง่ายใต้สภาพการยึดรั้งที่ปลาย โดยที่ปลายทั้งสองข้างหมุนได้ตามเงื่อนไขของจุดรองรับกำหนดแรงอัดเข้ากระทำที่ปลายของคาน ทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้โปรแกรม ABAQUS ซึ่งเป็นโปรแกรมที่สร้างขึ้นโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนล์เอลิเมนต์ โดยนำผลที่ได้ไปตรวจสอบกับผลที่ได้จากวิธีการยิงเป้า และในปี พ.ศ. 2557 (ค.ศ. 2014) ณัฐฎ์ [16] ได้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งเดาะของอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีจุดหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงความยาวของอิ-ลาสติคคา ทำการหาคำตอบด้วยวิธีการยิงเป้าและเปรียบเทียบรูปร่างของอิลาสติคคาที่ได้จากการคำนวณกับการทดลอง ผลที่ได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

จากการทบทวนวรรณกรรมจะพบได้ว่าปัญหาของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ส่วนใหญ่จะศึกษาในรูปของความยาวส่วนโค้งที่ต่อเนื่องกันเป็นชิ้นเดียว แต่เนื่องจากเมื่อคานที่รับแรงกระทำเกิดการเสียรูปได้มากจึงอาจมีโอกาสที่คานเกิดจุดหักงอได้ ซึ่งจุดในลักษณะดังกล่าวไม่สามารถส่งถ่ายโมเมนต์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเป็นการศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุด โดยมีจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงและแรงกระทำอยู่ในตำแหน่งเดียวกัน ซึ่งในอดีตที่ผ่านมาการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวกับน้ำหนักบรรทุกกระทำในลักษณะนี้ยังคงมีจำนวนน้อยอยู่และน้ำหนักบรรทุกที่กระทำยังคง

กระทำในรูปแบบเดิมๆ โดยที่ปลายด้านหนึ่งของคานถูกรองรับด้วยจุดรองรับที่หมุนได้อย่างอิสระ ส่วนที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางพาดอยู่บนจุดรองรับที่เลื่อนได้โดยไร้แรงเสียดทาน พร้อมทั้งปรับเปลี่ยนค่าสติฟ-เนสของสปริงเพื่อให้เกิดความต้านทานที่หลากหลาย ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้พัฒนารูปแบบการวางตำแหน่งของสปริงและแรงกระทำมาจากงานวิจัยที่ [16] และภายใต้แรงกระทำดังกล่าวเมื่อคานเกิดการแอ่นตัวความยาวส่วนโค้งทั้งหมดมีค่าไม่คง โดยจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงจะทำหน้าที่ส่งถ่ายโมเมนต์ดัดและแรงเฉือน โครงสร้างในลักษณะนี้นิยมใช้เป็นแบบจำลองในงานวิศวกรรมนอกชายฝั่งที่เกี่ยวกับท่อส่งน้ำมันและท่อส่งก๊าซธรรมชาติ ซึ่งจำลองให้ด้านที่มีจุดรองรับแบบยึดหมุนเปรียบเป็นปลายของท่อส่งด้านที่ยึดติดกับแท่นที่ขุดเจาะใต้ทะเล และด้านจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานเปรียบเสมือนแท่นผลิตที่อยู่บนเรือเดินสมุทรที่ลอยอยู่ที่ระดับผิวน้ำที่สามารถเลื่อนได้ทำให้ความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

2. ลักษณะของปัญหา

จากรูปที่ 1 โครงสร้างที่ทำการศึกษามีลักษณะเป็นคานช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ และมีค่าความแข็งแรงของวัสดุต่อการดัด (Flexural Rigidity) เท่ากับ EI โดยที่ปลายด้านหนึ่งของคานวางอยู่บนจุดรองรับแบบข้อหมุน (ที่จุด A) ส่วนที่ปลายของคานอีกด้านหนึ่งวางพาดอยู่บนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน (ที่จุด B) เมื่อคานเกิดการแอ่นตัวมากปลายคานด้านนี้สามารถเคลื่อนผ่านจุดรองรับได้อย่างอิสระ จุดรองรับทั้งสองมีระยะห่างกันเท่ากับ L และในคานมีจุดต้านทานการหมุนแบบสปริง (K) และแรงกระทำแบบจุด (P) กระทำ อยู่ภายใน (ที่จุด C) ซึ่งมีระยะห่างจากจุดรองรับด้าน A เท่ากับ αL ใดๆ และจากรูปที่ 2 เมื่อคานเกิดการเสียรูปที่ปลายด้าน A และ B ของคานหมุนไปเป็นมุม θ_A และ θ_B ตามลำดับ โดยที่มุมเหล่านี้วัดเทียบกับแนวราบ โดยที่ตำแหน่งของแรงกระทำ (P) ยังคงยึดติดกับตำแหน่งเดิมนั่นคือตำแหน่ง αL และหลังจากการเสียรูปตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงและตำแหน่งของแรงกระทำ $(\alpha L, 0)$ จะเปลี่ยนตำแหน่งมาเป็น (x^*, y^*) โดยตำแหน่งที่เปลี่ยนไปเหล่านี้วัดจากปลายด้าน A ตามแนวราบและแนวดิ่ง

เมื่อพิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของคาน ดังแสดงในรูปที่ 3 สามารถเขียนสมการของโมเมนต์ดัดได้ดังนี้

$$M_1 = \left(\frac{Px^*}{L}\tan\theta_B y\right) + \left(\frac{P(1-x^*)}{L}x\right) \tag{1}$$

จากรูปที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและผลต่างของมุมที่จุดต้านทานการหมุนแบบสปริงที่เป็นเชิงเส้นแสดงดังนี้

$$M_1^*(\alpha) = \left(\frac{Px^*}{L}\tan\theta_B y_c\right) + \left(\frac{P(1-x^*)}{L}x_c\right) = K\Delta\theta \tag{2}$$

$$M_2^*(\alpha) = K\Delta\theta \tag{3}$$

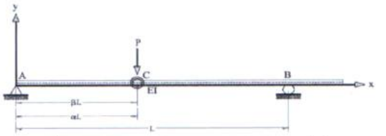
โดยที่

$M_1^*(\alpha)$ = ค่าโมเมนต์ดัดทางด้านซ้ายของจุดหมุนแบบสปริง

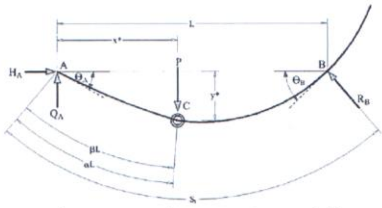
$M_2^*(\alpha)$ = ค่าโมเมนต์ดัดทางด้านขวาของจุดหมุนแบบสปริง

$\Delta\theta$ = ค่าผลต่างของมุม ณ ตำแหน่งสปริง (ที่จุด C)

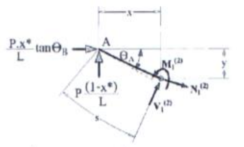
K = ค่าสติฟเนสของสปริง



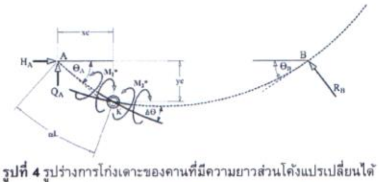
รูปที่ 1 รูปร่างของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะก่อนการเสียรูป



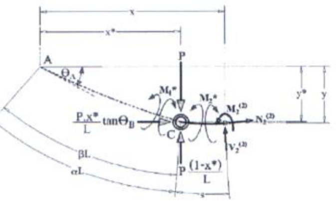
รูปที่ 2 รูปร่างของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในสภาวะหลังการเสียรูป



รูปที่ 3 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของคาน ช่วงพิจารณา $0 \le s \le \alpha L$



รูปที่ 4 รูปร่างการโก่งเดาะของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่มีจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงอยู่ภายใน



รูปที่ 5 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของคาน ช่วงพิจารณา $\alpha L \le s \le s_t$

เมื่อพิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของคาน ดังแสดงในรูปที่ 5 สามารถเขียนสมการของโมเมนต์ดัดได้ดังนี้

$$M_2 = \left(\frac{Px^*}{L}\tan\theta_B(y-y^*)\right) + \left(\frac{P(1-x^*)}{L}(x-x^*)\right) - P(x-x^*) + K\Delta\theta \quad (4)$$

และจากสมการความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของออยเลอร์และเบอร์นูลลี่

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_i}{EI} \quad (5)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta \quad (6)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta \quad (7)$$

สำหรับชิ้นส่วนคานในช่วง $0 \le \bar{s} \le \alpha$ นำสมการที่ (1) แทนลงไปในสมการที่ (5) และเขียนสมการที่ได้ให้อยู่ในรูปไร้หน่วยดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \bar{M}_1 = \left[\bar{P}\bar{x}^* \tan\theta_B \bar{y} + \bar{P}(1-\bar{x}^*)\bar{x}\right] \quad (8)$$

สำหรับชิ้นส่วนคานในช่วง $\alpha \le \bar{s} \le \bar{s}_l$ นำสมการที่ (2) แทนลงไปในสมการที่ (5) และเขียนสมการที่ได้ให้อยู่ในรูปไร้หน่วยดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \bar{M}_2 = \left[\bar{P}\bar{x}^* \tan\theta_B(\bar{y}-\bar{y}^*) + \bar{P}(1-\bar{x}^*)(\bar{x}-\bar{x}^*) - \bar{P}(\bar{x}-\bar{x}^*) + \bar{K}\Delta\theta\right] \quad (9)$$

โดยที่ตัวแปรต่างๆ ในระบบสมการอนุพันธ์ที่ได้จะต้องถูกเขียนให้อยู่ในรูปของตัวแปรไร้หน่วยเพื่อความสะดวกต่อการหาคำตอบเชิงตัวเลขและลดความผิดพลาดจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการยิงเป้าดังนี้

$$\bar{x} = \frac{x}{L};\ \bar{y} = \frac{y}{L};\ \bar{x}^* = \frac{x^*}{L};\ \bar{y}^* = \frac{y^*}{L} \quad (10ก\text{-}ง)$$

$$\bar{s} = \frac{s}{L};\ \bar{s}_l = \frac{s_l}{L};\ \bar{P} = \frac{PL^2}{EI};\ \bar{I} = \frac{I}{L^4} \quad (10จ\text{-}ซ)$$

$$\bar{M}_i = \frac{M_i L}{EI};\ \bar{K} = \frac{KL}{EI} \quad (10ฌ\text{-}ฏ)$$

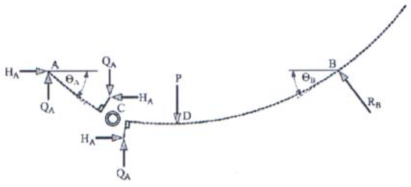
สมการที่ (8) และ (9) เป็นสมการอนุพันธ์ที่ใช้อธิบายชิ้นส่วนย่อยของคานที่อยู่ในรูปไร้หน่วย ดังนั้นหากต้องการพฤติกรรมทั้งหมดต้องทำการอินทิเกรตให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา (Boundary Conditions) ดังนี้

$$\theta(\bar{s}_l = 0) = \theta_A \quad ; \quad \theta(\bar{s}_l = 1) = \theta_B \quad (11ก)$$

$$\bar{x}(0) = 0 \quad ; \quad \bar{x}(\bar{s}_l) = 1 \quad (11ข)$$

$$\bar{y}(0) = 0 \quad ; \quad \bar{y}(\bar{s}_l) = 0 \quad (11ค)$$

$$\bar{x}(\alpha) = \bar{x}^* \quad (11ฆ)$$



รูปที่ 6 พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของคานจากแรงเฉือน

$$\bar{y}(\alpha) = \bar{y}^* \quad (11ง)$$

$$((\bar{P}\bar{x}^* \tan\theta_B \bar{y}^* + (\bar{P}(1-\bar{x}^*)\bar{x}^*)) = \bar{K}\Delta\theta \quad (11จ)$$

3. วิธีการคำนวณ

จากระบบสมการครอบคลุมปัญหาในสมการที่ (8) และ (9) นั้น กระบวนการหาคำตอบของระบบสมการอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปของตัวแปรไร้หน่วย สามารถกระทำได้โดยใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้าร่วมด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีรุงเง - คุตตา อันดับ 4 และแก้ปัญหาด้วยวิธีกระทำซ้ำของนิวตัน - ราฟสัน โดยมีขั้นตอนและวิธีการคำนวณเริ่มจากกำหนดค่าของตัวแปรควบคุมซึ่งกำหนดให้ใช้ค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของคาน ($\bar{s}_l$) เป็นตัวแปรควบคุม จากนั้นทำการกำหนดค่าตัวแปรของตำแหน่งสปริงและแรงกระทำ $\alpha = 0.25, 0.50, 0.75$ ค่าสติฟเนสของสปริง $\bar{K} = 1, 10, 100$ และทำการประมาณค่าเริ่มต้นของตัวแปรที่ต้องการได้แก่ $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \bar{x}^*, \bar{y}^*, \Delta\theta$ โดยการอินทิเกรตสมการที่ (8) และ (9) จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดไว้ในสมการที่ (11ก - จ) ซึ่งใช้วิธีกระทำซ้ำของนิวตัน - ราฟสันในการปรับแก้ค่าประมาณเริ่มต้นเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขดังแสดงไว้ในสมการที่ (12) โดยกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้เท่ากับ 10^{-7}

$$Min\ \phi = \left|\theta(\bar{s}_l{=}1)-\theta_B\right| + \left|\bar{x}(\bar{s}_l{=}1)-1\right| + \left|\bar{y}(\bar{s}_l{=}1)\right| \left|\bar{x}(\alpha)-\bar{x}^*\right| + \left|\bar{y}(\alpha)-\bar{y}^*\right| + \left|\left((\bar{P}\bar{x}^* \tan\theta_B \bar{y}^*) + (\bar{P}(1-\bar{x}^*)\bar{x}^*)\right) - \bar{K}\Delta\theta\right| \quad (12)$$

ภายหลังกระบวนการหาคำตอบโดยวิธีนิวตัน - ราฟสัน จะทำการปรับค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดเพิ่มเป็น $\bar{s}_l = \bar{s}_l + \Delta\bar{s}_l$ และเริ่มกระบวนการหาคำตอบต่อไปโดยวิธีนิวตัน - ราฟสันต่อไป จนกระทั่งได้คำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว

4. ผลการศึกษา

4.1 ตรวจสอบและเปรียบเทียบความถูกต้องของผลการคำนวณ

เพื่อให้เกิดความมั่นใจในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และโปรแกรมที่ถูกพัฒนาขึ้นมานั้น จำเป็นต้องมีการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบที่ได้ โดยเปรียบเทียบกับผลการคำนวณพฤติกรรมการแอ่นตัว

มากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่มีความต่อเนื่องกัน (Single VAL Beam) จากตารางที่ 1, 2 และ 3 แสดงการเปรียบเทียบผลของคานที่มีค่าสติฟเนสของสปริง $\bar{K} = 100$ กับคานที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Beam) ในกรณีที่ตำแหน่งของสปริงและแรงกระทำมีค่าเท่ากับ $\alpha = 0.25$, 0.50 และ 0.75 พบว่าคำตอบที่ได้มีค่าที่ใกล้เคียงกัน

4.2 พฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคาน

เมื่อนำผลที่ได้มาเขียนเส้นโค้งการเบี่ยงเบนของแรง (Load - Deflection Curves) ดังแสดงในกราฟรูปที่ 7 8 และ 9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $(\bar{P})$ กับความยาวส่วนโค้ง $(\bar{s}_t)$ เมื่อแปรผันค่า $\bar{K}$ ตั้งแต่ 1 - 100 (ระบบจะไร้เสถียรภาพเมื่อกำหนดให้ $\bar{K} = 0$) และแปรผันค่า α ที่ระยะ 0.25, 0.50 และ 0.75 ตามลำดับ เริ่มแรกเมื่อทำการเพิ่มแรง $\bar{P}$ ให้กับคาน ค่าของแรง $\bar{P}$ จะเพิ่มขึ้นในขณะที่ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{s}_t$ ก็เพิ่มขึ้นเช่นกันซึ่งเป็นการเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องโดยไม่พบจุดวิกฤต ดังกรณีที่ $\alpha = 0.25$ (รูปที่ 7) จะเห็นได้ว่าคานมีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้นเมื่อแรงกระทำ $\bar{P}$ มีค่าเพิ่มขึ้นลักษณะเช่นนี้ความชันของกราฟความสัมพันธ์มีค่าเป็นบวกเป็นการบ่งบอกถึงระบบที่มีเสถียรภาพ (สมดุลแบบมีเสถียรภาพ) และเมื่อทำการเพิ่มแรงอย่างต่อเนื่องคานจะเกิดการดึงรั้งทำให้ความชันของกราฟมีค่าที่สูงมาก โดยที่การเปลี่ยนแปลงความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{s}_t$ ที่เพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของแรงกระทำ $\bar{P}$ ที่มีค่ามากจนกระทั่งไม่สามารถคำนวณผลได้อีกต่อไป พฤติกรรมในลักษณะดังกล่าวจะพบได้ในกรณีที่ $\alpha = 0.50$ และ 0.75 เช่นกัน ในขณะที่ผลกระทบของสติฟเนสของสปริง จะพบว่าค่าสติฟเนสของสปริงที่มีค่าน้อยส่งผลให้ระบบมีสติฟเนสต่ำในช่วงแรกแต่เมื่อระบบเกิดการยึดรั้งสติฟเนสของคานจะมีค่าที่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว และเมื่อสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุนมีค่าที่เพิ่มขึ้นพฤติกรรมของคานจะสอดคล้องกับพฤติกรรมของคานที่มีความยาวต่อเนื่องกัน โดยที่ภาพรวมทั้งหมดของพฤติกรรมการแอ่นตัวของคานที่เกิดขึ้นในแต่ละกรณีได้แสดงไว้ในกราฟรูปที่ 10 ซึ่งจะเห็นได้ว่าตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกที่อยู่ใกล้จุดรองรับด้านใดด้านหนึ่งมีโอกาสเกิดการดึงรั้งของคานสูงทำให้ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับกรณีที่น้ำหนักบรรทุกกระทำอยู่บริเวณกึ่งกลางคาน

จากกราฟในรูปที่ 11 (ก), (ข) และ (ค) แสดงรูปร่างการแอ่นตัวของคาน เมื่อกำหนดแรง $\bar{P} = 85.00$ โดยแปรผันค่า $\alpha = 0.25$, 0.50 และ 0.75 แปรผันค่า $\bar{K}$ ตั้งแต่ 1, 10, 100 และคานที่มีความยาวต่อเนื่องกันแสดงให้เห็นว่าเมื่อค่าสติฟเนสของสปริงมีค่าน้อยพฤติกรรมการแอ่นตัวของคานจะแสดงให้เห็นถึงจุดต้านทานการหมุนที่ส่งถ่ายค่าโมเมนต์ดัดได้อย่างไม่สมบูรณ์เกิดเป็นจุดหักมุมที่ชัดเจน และเมื่อแปรผันค่าสติฟเนสของสปริงให้มีค่าที่มากขึ้นคานจะมีพฤติกรรมการแอ่นตัวที่มีค่าใกล้เคียงและสอดคล้องกับคานที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Beam) เมื่อมีแรงกระทำที่เท่ากัน โดยที่ตำแหน่งของแรงกระทำและสปริงจะยึดติดอยู่กับตำแหน่งเดิมเสมอ (จุดสีแดง) เมื่อความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้นจนกระทั่งเกิดการดึงรั้งทำให้ไม่สามารถเพิ่มความยาวส่วนโค้งต่อไปได้อีก

ตารางที่ 1 เปรียบเทียบผลของคานที่มีค่าสติฟเนสของสปริง $\bar{K} = 100$ กับคานที่มีความยาวต่อเนื่องเป็นเนื้อเดียวกันในกรณีที่ $\alpha = 0.25$

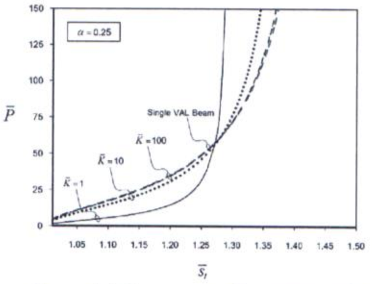
$\bar{s}_t$	$\bar{P}$	
	$\bar{K} = 100$	Single VAL Beam
1.01	4.321650192	4.409671023
1.05	10.63373893	10.84232632
1.10	17.27220292	17.59072127
1.15	24.87137905	25.28286594
1.20	34.76164292	35.21786481
1.25	49.01572072	49.3495377
1.30	72.28738791	71.91857736
1.35	117.9757711	114.5448383
1.40	241.0491368	220.6756838
1.45	943.4067807	696.9470905

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบผลของคานที่มีค่าสติฟเนสของสปริง $\bar{K} = 100$ กับคานที่มีความยาวต่อเนื่องเป็นเนื้อเดียวกันในกรณีที่ $\alpha = 0.50$

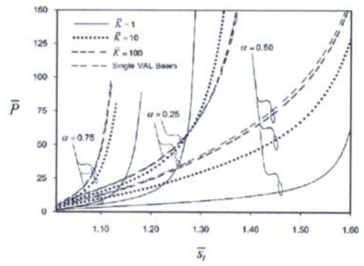
$\bar{s}_t$	$\bar{P}$	
	$\bar{K} = 100$	Single VAL Beam
1.01	3.083749671	3.161682857
1.05	7.555342811	7.755345485
1.10	12.27298178	12.62728567
1.15	17.63375988	18.20109511
1.20	24.1035344	24.96819574
1.25	31.7564895	33.00451499
1.30	40.48230234	42.1846921
1.35	50.2543519	52.46491624
1.40	61.36941224	64.12878161
1.45	74.66404444	77.99859729
1.50	91.8801242	95.77984076
1.55	116.5778062	120.9010749
1.59	146.8291404	151.0734543

ตารางที่ 3 เปรียบเทียบผลของคานที่มีค่าสติฟเนสของสปริง $\bar{K} = 100$ กับคานที่มีความยาวต่อเนื่องเป็นเนื้อเดียวกันในกรณีที่ $\alpha = 0.75$

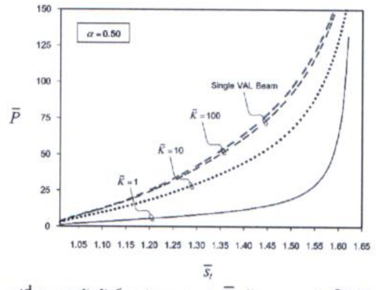
$\bar{s}_t$	$\bar{P}$	
	$\bar{K} = 100$	Single VAL Beam
1.01	4.452420139	4.545317879
1.02	6.682036665	6.824257289
1.03	8.765256915	8.956912769
1.04	10.963970463	11.212823726
1.05	13.468919070	13.791143406
1.06	16.510548788	16.936258416
1.07	20.439477705	21.025807187
1.08	25.851343891	26.712011500
1.09	33.802669121	35.170909008
1.10	46.090005597	48.420668179
1.11	65.279771772	69.313976368
1.12	94.242764443	100.974842259



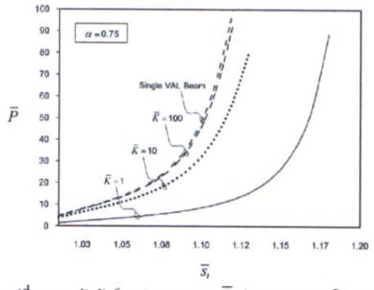
รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\overline{s_l}$
กรณีค่า $\alpha = 0.25$



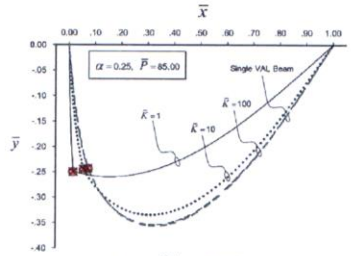
รูปที่ 10 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\overline{s_l}$
กรณีค่า $\overline{K} = 1, 10, 100$ และ $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$



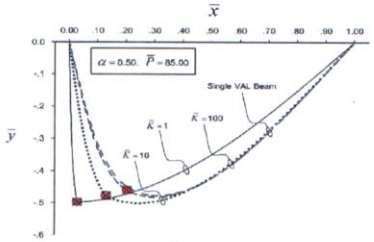
รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\overline{s_l}$
กรณีค่า $\alpha = 0.50$



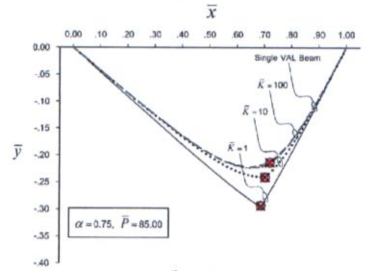
รูปที่ 9 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้ง $\overline{s_l}$
กรณีค่า $\alpha = 0.75$



(ก) กรณีค่า $\alpha = 0.25$



(ข) กรณีค่า $\alpha = 0.50$



(ค) กรณีค่า $\alpha = 0.75$

รูปที่ 11 รูปร่างการแอ่นตัวของคาน เมื่อขนาดของแรงกระทำ $\overline{P} = 85.00$
(ก) $\alpha = 0.25$, (ข) $\alpha = 0.50$, (ค) $\alpha = 0.75$

5. สรุปผลการศึกษา

งานวิจัยนี้นำเสนอผลของจุดต้านทานการหมุนต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบจุด พบว่าแรงกระทำและความยาวส่วนโค้งของคานจะมีค่าที่เพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องเพียงครั้งเดียวและมีสภาวะสมดุลเป็นแบบมีเสถียรภาพเท่านั้น ซึ่งเมื่อตำแหน่งของสปริงและแรงกระทำ (α) มีค่าเข้าใกล้ปลายคานด้านจุดรองรับที่เลื่อนได้โดยไร้แรงเสียดทานจะส่งผลให้คานเกิดการดึงรั้งขึ้น และในกรณีที่ปรับเปลี่ยนค่าสติฟเนสของสปริงให้มีค่า $\overline{K} = 100$ เมื่อนำเส้นกราฟมาเปรียบเทียบกับเส้นกราฟกรณีคานที่มีความยาวต่อเนื่องกัน (Single VAL Beam) ปรากฏว่าเส้นกราฟที่ได้มีค่าที่ใกล้เคียงกัน

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณกองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ที่สนับสนุนงานวิจัยนี้ งบประมาณปี 2559

เอกสารอ้างอิง

[1] สุรพันธ์ บุญเจริญ (2536). การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายเลื่อนได้อย่างอิสระ โดยวิธีอิลิปติคอินทิกรัล. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*, หน้า 1 - 103.

[2] Chucheepsakul, S., Buncharoen, S. and Wang, C.M. (1994). Large deflection of beams under moment gradient, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics*, 120, pp. 1848-1860.

[3] Chucheepsakul, S., Buncharoen, S. and Huang, T. (1995). Elastica of simple variable - arc - length beam subjected to end moment. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics*, 121, pp. 767-772.

[4] จีระพงษ์ เทพพิทักษ์ (2538). การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบต่างๆ. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*, หน้า 1 - 168.

[5] Wang, C.M., Lam, K.Y., He, X.Q. and Chucheepsakul, S. (1997). Large deflection of an end supported beam subjected to a point load. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32, pp. 63-72.

[6] ทินกร มนต์ประภัสสร (2540). การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยคำนึงถึงผลของการยึดรั้งและความเสียดทานของที่รองรับและผลของแรงเฉือน. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*, หน้า 1 - 130.

[7] Chucheepsakul, S., Wang, C.M., He, X.Q. and Monprapusson, T. (1999). Double curvature bending of variable-arc-length elasticas. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 66, pp. 87-94.

[8] บุญชัย ผึ้งไผ่งาม (2544). การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบเอียงที่เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูป. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*, หน้า 1 - 91.

[9] กอปร์ชัย ศิริตระกูลมั่งคั่ง (2545). การหาคำตอบทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้ระบบพิกัดลากรานจ์. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*, หน้า 1 - 106.

[10] นฤพนธ์ ศิลาภากุล (2548). การแอ่นตัวมากของคานที่ทาจากวัสดุแบบไม่เชิงเส้น. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*, หน้า 1 - 71.

[11] Phungpaingam, B., Chucheepsakul, S. and Wang, C.M. (2006). Postbuckling of beam subjected to intermediate follower force. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 132, pp. 16-25.

[12] Pulngern, T. Halling, M.W., Chucheepsakul, S. and Poovarodom, P. (2006). On the free vibrations of variable - arc - length beam : analytical and experimental. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 132, pp. 772-778.

[13] Athisakul, C. and Chuchepsakul, S. (2008). Effect of inclination on bending of variable-arc-length beam subjected to uniform self - weight. *Engineering Structures*, 30, pp. 902-908.

[14] กฤษณะชัย จันทรกอง (2554). การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่ทำจากวัสดุแบบไม่เป็นเชิงเส้น ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบต่างๆ. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*, หน้า 1 - 149.

[15] สุนทร เกียรติคงศักดิ์ และสมชาย ชูชีพสกุล (2548). พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของคานอย่างง่ายใต้สภาพการยึดรั้งที่ปลาย. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*, หน้า 1 - 116.

[16] ณัฐฎ์ พิชัยยุทธ์ (2557). พฤติกรรมการโก่งเดาะของอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีจุดหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงความยาวของอิลาสติคคา. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี*, หน้า 1 - 111.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ - สกุล	นายมานะชัย สุวรรณ
วัน เดือน ปีเกิด	6 พฤษภาคม 2524
ที่อยู่	25 หมู่ที่ 9 ซอยบ้านปรก 22/2 ถนนสมุทรสงคราม - บางแพ ตำบลบ้านปรก อำเภอเมืองฯ จังหวัดสมุทรสงคราม 75000
ประวัติการศึกษา	ปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเอเชียอาคเนย์
ประวัติการทำงาน	
พ.ศ. 2548 ถึง พ.ศ. 2550	นายช่างโยธา สังกัดฝ่าย/กอง ส่วนโยธา ชื่อหน่วยงาน องค์การบริหารส่วนตำบลดอนตะโก จังหวัดราชบุรี
พ.ศ. 2548 ถึง ปัจจุบัน	วิศวกรโยธาชำนาญการ สังกัดฝ่าย/กอง ฝ่ายก่อสร้างและซ่อมบำรุง กองช่าง ชื่อหน่วยงาน องค์การบริหารส่วนจังหวัดสมุทรสงคราม
เบอร์โทรศัพท์	08 - 3036 - 6648
อีเมล์	toy_obj_civil13@hotmail.com

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี