ผลความสม่ำเสมอของความยาวเอลิเมนต์ต่อความแม่นยำและอัตราลู่เข้าของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ

EFFECT OF ELEMENT LENGTH UNIFORMITY ON ACCURACY AND CONVERGENCE RATE OF POLYGONAL FINITE ELEMENT FOR PLANE STRESS PROBLEM

ธนชาติ ศรีเพ็ง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2566

ผลความสม่ำเสมอของความยาวเอลิเมนต์ต่อความแม่นยำและอัตราลู่เข้า ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ

ธนชาติ ศรีเพ็ง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2566

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลความสม่ำเสมอของความยาวเอลิเมนต์ต่อความแม่นยำและอัตราลู่เข้าของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ Effect of Element Length Uniformity on Accuracy and Convergence Rate of Polygonal Finite Element for Plane Stress Problem
ชื่อ – นามสกุล	นายธนชาติ ศรีเพ็ง
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.
ปีการศึกษา	2566

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ชัยณรงค์ อธิสกุล, ปร.ด.)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ศุภสิทธิ พงศ์ศิวะสถิตย์, Ph.D.)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.)

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี อนุมัติวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์สรพงษ์ ภวสุปรีย์, Ph.D.)
วันที่ 20 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2567

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลความสม่ำเสมอของความยาวเอลิเมนต์ต่อความแม่นยำและอัตราลู่เข้าของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ
ชื่อ-นามสกุล	นายธนชาติ ศรีเพ็ง
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.
ปีการศึกษา	2566

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ทำการศึกษาผลความสม่ำเสมอของความยาวเอลิเมนต์ต่อความแม่นยำและอัตราลู่เข้าของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (Polygonal Finite Element Method, PFEM) สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ โดยทำการเพิ่มจำนวนของโหนดลงไปในแต่ละด้านของเอลิเมนต์แบบทรงเหลี่ยมสี่หน้าเพื่อทำให้เอลิเมนต์นั้นกลายเป็นเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม กำหนดให้อัตราส่วนของความยาวด้านภายหลังเพิ่มโหนดต่อความยาวด้านเดิม (α) นั้น อยู่ในช่วง 0.1-0.5

ปัญหาทดสอบสำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ คือคานยื่นปลายของ Cook ที่ถูกปรับปรุงแล้วในระนาบ 2 มิติ รับแรงเฉือนกระทำตามขอบของปลายคานด้านไกล ความละเอียดของโครงตาข่ายแบ่งเป็น 3 กรณี จากโครงตาข่ายความละเอียดน้อยสู่ความละเอียดมาก ทำการศึกษาผลการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งที่ปลายคาน ความเครียดและความเค้น รวมทั้งค่ามาตรฐานความคลาดเคลื่อนของการเปลี่ยนตำแหน่ง โดยเปรียบเทียบผลที่ได้กับโปรแกรมสำเร็จรูปไฟไนต์เอลิเมนท์ที่ใช้เอลิเมนต์แบบรูปทรงสี่หน้าจำนวนมากพอเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำมากพอที่จะใช้เป็นตัวแทนผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นตรง (Close-to-Exact Solution)

ผลการศึกษาพบว่า อัตราส่วนความสม่ำเสมอความยาวด้านของเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งในระนาบด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนั้น มีความไวต่อค่าความแม่นยำของการเปลี่ยนตำแหน่งอย่างชัดเจน เมื่อความละเอียดของโครงตาข่ายมากขึ้น ค่าของอัตราส่วนดังกล่าว ณ ตำแหน่งกึ่งกลางความยาวด้าน ให้ค่าที่เหมาะสม (Optimum) ที่สุดในขณะที่ใช้จำนวนเอลิเมนต์และโหนดน้อยกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ผลลัพธ์ของความเค้น ความเครียดรวมทั้งการกระจายตัวมีลักษณะสอดคล้องกับค่าที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ อัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยมีค่าความชันเท่ากับ 0.994 ณ อัตราส่วนความยาวด้านเท่ากับ 0.5 ซึ่งใกล้เคียงกับค่าเหมาะสม 1.0 ของการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบเชิงตัวเลข

คำสำคัญ : ไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม ความสม่ำเสมอของความยาวเอลิเมนต์ คานยื่นปลายปรับปรุงของ Cook อัตราการลู่เข้า

Thesis Title	Effect of Element Length Uniformity on Accuracy and Convergence Rate of Polygonal Finite Element for Plane Stress Problem
Name-Surname	Mr. Tanachat Sripeng
Program	Civil Engineering
Thesis Advisor	Associate Professor Kamtornkiat Musiket, Ph.D.
Academic Year	2023

ABSTRACT

This research investigates the impact of element length consistency on the accuracy and convergence rate of the polygonal finite element method (PFEM) for plane stress problems. The number of nodes on each side of a quadrilateral element is increased to transform it into a polygonal element. The ratio of the post-node-addition side length to the original side length (α) is varied between 0.1 and 0.5.

The benchmark problem is a modified cantilever Cook's beam subjected to a shear force acting along the edge of the far end of the beam. Meshing is divided into three cases, from coarse to finer mesh. The study investigates the effect of the vertical displacement at the end of the beam, stresses, strains, and the displacement error norm. The results are compared with those of a commercial finite element program using many quadrilateral elements to ensure sufficiently accurate solutions to serve as a reference for the close-to-exact solutions.

The study found that the aspect ratio of the element side lengths for the analysis using the polygonal finite element method is clearly sensitive to the accuracy of the displacements. As the mesh refinement increases, the value of the aspect ratio at the midpoint of the side length gives the most suitable (optimum) value while using fewer elements and nodes than the finite element method. The results of stresses, strains, and their distribution are consistent with those obtained from the finite element method. The convergence rate has a slope of 0.994 at an aspect ratio of 0.5, which is close to the optimum value of 1.0 for the numerical analysis of plane stress problems.

Keywords: polygonal finite element, element length uniformity, modified cantilever Cook's beam, convergence rate

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี โดยได้รับความช่วยเหลือ สนับสนุน และการให้ข้อคิดเห็นที่เป็นประโยชน์ตลอดจนการแก้ไขข้อบกพร่อง ปรับปรุงด้วยความละเอียดและเอาใจใส่เป็นอย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ ดร.กำธรเกียรติ มุสิเกตุ อาจารย์ที่ปรึกษา ที่ได้กรุณาเสียสละเวลาให้ความรู้ คำปรึกษา คำแนะนำ และให้ข้อเสนอแนะจนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้ทำการศึกษาวิจัยขอกราบขอบพระคุณอย่างสูงมา ณ ทีนี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย ผึ้งไผ่งาม ประธานกรรมการสอบและรองศาสตราจารย์ ดร.ศุภสิทธิ์ พงศ์ศิวะสถิตย์ กรรมการสอบ ที่ได้ให้ความกรุณาให้คำแนะนำแนวทางในการค้นคว้าและการแก้ไขข้อบกพร่องของงานวิจัยฉบับนี้ และขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ชัยณรงค์ อธิสกุล กรรมการและผู้ทรงคุณวุฒิจากภายนอก จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ที่ได้ให้ความกรุณาเสียสละเวลามาร่วมเป็นคณะกรรมการในการสอบวิทยานิพนธ์ และให้คำชี้แนะ แนะนำ ตรวจสอบข้อมูล ที่เป็นประโยชน์แก่งานวิจัยนี้

ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ หลวงลุง คุณลุง คุณย่า น้องชาย คุณน้า และแฟน ที่ให้โอกาสและคอยสนับสนุนให้ได้เรียนปริญญาโทเพื่อศึกษาหาความรู้และพัฒนาความสามารถทางด้านวิศวกรรมโยธา และขอขอบคุณเพื่อนๆ สาขาวิศวกรรมโครงสร้าง ทุกคนที่คอยช่วยเหลือและผลักดันให้งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วง

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้ที่สนใจหากการค้นคว้าในครั้งนี้ขาดตกบกพร่อง หรือไม่สมบูรณ์ประการใด ผู้วิจัยขอกราบขออภัยมา ณ โอกาสนี้ด้วย

ธนชาติ ศรีเพ็ง

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) เป็นเทคนิคเชิงตัวเลขที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในการแก้ไขสมการคณิตศาสตร์และวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างด้านกายภาพในทางวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ประยุกต์แม้ว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพ แต่ต้องพบเจอกับปัญหาที่อาจเกิดขึ้นจึงจำเป็นต้องได้รับการแก้ไข ซึ่งปัญหาโดยทั่วไปบางประการที่พบในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ คือการสร้างตาข่าย (Mesh) ที่เกิดความผิดเพี้ยนของเอลิเมนต์อาจเกิดขึ้นได้เมื่อโครงตาข่ายมีรูปร่างไม่เหมาะสม เอลิเมนต์ที่มีอัตราส่วนความกว้างยาวสูงหรือรูปร่างที่บิดเบี้ยวอาจส่งผลให้ระบบเมทริกซ์ไม่มีเสถียรภาพ สิ่งนี้สามารถนำไปสู่ผลลัพธ์ที่ไม่ถูกต้องและความไม่แน่นอนของตัวเลข

ในอดีตช่วงหลายทศวรรษที่ผ่านมาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้รับการพัฒนาโดยนักวิจัยและวิศวกรจำนวนมาก แม้ว่าการค้นคว้าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นเรื่องที่ซับซ้อนและเข้าใจยาก แต่ก็มีผู้สนับสนุนจำนวนมากที่เข้ามามีบทบาทเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาและค้นคว้าทำให้เกิดความก้าวหน้าของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในการวิเคราะห์และการแก้ไขปัญหาทางด้านวิศวกรรม สมการทางคณิตศาสตร์มีส่วนสำคัญเป็นอย่างมากโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมและยอมรับในระดับสากล คือระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้ไขปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในขอบเขตที่ซับซ้อน โดยปัญหาส่วนใหญ่ที่ได้รับการวิเคราะห์กันมานั้นมักเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับกลศาสตร์ของแข็ง (Solid Mechanics) หรือปัญหาทางด้านโครงสร้าง (Structure) เช่น การออกแบบงานโครงสร้างเหล็ก การออกแบบงานโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็ก เป็นต้น ซึ่งสามารถจำลองโครงสร้างโดยแบ่งโครงสร้างออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆจากชิ้นส่วนโครงสร้างขนาดใหญ่สู่ชิ้นส่วนโครงสร้างขนาดเล็ก หลักการนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ ในปัจจุบันโครงสร้างมีความเสียหายเกิดขึ้นอยู่ตลอดเวลาเสี่ยงต่อผู้พักอาศัย วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถประเมินพฤติกรรมต่างๆ เช่น แรงที่กระทำต่อโครงสร้างการเสียหายของชิ้นส่วนโครงสร้าง เป็นต้น ทำให้สามารถคาดการณ์การวิบัติของโครงสร้างได้ จึงนำไปสู่วิธีการป้องกันและหาแนวทางการแก้ไขเพื่อลดความเสียหายที่จะเกิดขึ้นกับโครงสร้างหรือผู้อยู่อาศัยได้โดยสามารถลดการทดสอบในห้องปฏิบัติการซึ่งจะลดต้นทุนและลดการใช้สิ้นทรัพยากรอย่างสิ้นเปลืองต่อมาได้นำเครื่องคอมพิวเตอร์เข้ามาประยุกต์ใช้ในการแก้สมการของสติฟเนสเมทริกซ์ (Stiffness Matrix) วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถแก้ปัญหาองค์อาคารที่เป็นโครงสร้างพื้นฐานได้เช่น คาน โครงถัก เป็นต้น ซึ่งเอลิเมนต์แบบคาน (Beam or Flexure Elements) เป็นเอลิเมนต์แบบหนึ่งมิติเช่นเดียวกับเอลิเมนต์แบบสปริงและเอลิเมนต์แบบแท่ง (Bar Element) การวิเคราะห์โดยพื้นฐานของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

พฤติกรรมทางกลศาสตร์ของชิ้นงานของแข็งนิยมพิจารณาในระนาบหนึ่งมิติและสองมิติ ในเรื่องของความเครียด (Strain) และความเค้น (Stress) ซึ่งความแม่นยำของคำตอบขึ้นอยู่กับการเสียรูปของเอลิเมนต์ โดยรูปทรงเอลิเมนต์แบบทรงสี่เหลี่ยมพื้นฐาน (Bilinear Quadrilateral Element) จะมีความแม่นยำกว่าเอลิเมนต์รูปทรงสามเหลี่ยมพื้นฐาน (Constant Strain Triangular Element) สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นและความเครียดในระนาบ 2 มิติ ในปัจจุบันการวิเคราะห์เชิงตัวเลขมีหลากหลายวิธี ยกตัวอย่างเช่น วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) วิธีเอลิเมนต์ขอบ (Boundary Element Method) วิธีสเกลบาว์เดอรีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Scaled Boundary Finite Element Method) และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์หลายเหลี่ยม (Polygonal Finite Element Method) เป็นต้น

งานวิจัยนี้ ศึกษาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์หลายเหลี่ยม (Polygonal Finite Element Method) โดยการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ GNU Octave มาประยุกต์ใช้เพื่อหาผลเฉลยของคานยื่นปลาย (Cook Beam) ที่ได้รับการปรับปรุงให้มีรูเจาะ ซึ่งรับแรงเฉือนกระทำที่ปลายคานด้านไกล เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่สร้างขึ้น ทำได้โดยการพิจารณาเพิ่มจำนวนของโหนด (Node) ลงไปในแต่ละด้านของเอลิเมนต์แบบทรงเหลี่ยมสี่หน้า (Quadrilateral Element) หรือเอลิเมนต์รูปทรงหลายเหลี่ยม เพื่อทำให้เอลิเมนต์นั้นกลายเป็นเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม ตำแหน่งของโหนดที่เพิ่มเข้าไปในแต่ละด้านของเอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้านั้น ถูกพิจารณาให้อยู่ในรูปของอัตราส่วนของความยาวด้านนั้นๆ

การจัดเรียงเนื้อหาของวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้ ประกอบไปด้วย บทที่ 1 บทนำ ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ ขอบเขตของการศึกษาและผลที่คาดว่าจะได้รับ บทที่ 2 กล่าวถึง ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง บทที่ 3 กล่าวถึงวิธีการศึกษาและดำเนินงานวิจัย ผลการศึกษาและสรุปผลและข้อเสนอแนะจะถูกกล่าวถึงในบทที่ 4 และ 5 ตามลำดับต่อไป

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อศึกษาทฤษฎีการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นและความเครียดในระนาบสองมิติด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (Polygonal Finite Element Method, PFEM)

1.2.2 เพื่อพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ต้นแบบสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นหรือความเครียดในระนาบสองมิติด้วยวิธี PFEM

1.2.3 เพื่อศึกษาผลของความไม่สม่ำเสมอสำหรับความยาวแต่ละด้านของเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมต่อความแม่นยำของผลลัพธ์และอัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นตรง (Convergence Rate)

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

1.3.1 ศึกษาทฤษฎีของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติสำหรับของแข็ง

1.3.2 เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (In-House Code) สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นหรือความเครียดในระนาบ 2 มิติด้วยวิธี PFEM ด้วยโปรแกรม GNU Octave

1.3.3 ศึกษาผลของความไม่สม่ำเสมอสำหรับความยาวแต่ละด้านของเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมต่อความแม่นยำของผลลัพธ์และอัตราการลู่เข้า โดยทำการกำหนดตำแหน่งของโหนดที่ถูกเพิ่มเติมลงไปเพื่อสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนั้น เป็นอัตราส่วนของความยาวด้านนั้น ซึ่งกำหนดให้อยู่ในช่วง 0.1-0.5 ปัญหาที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์ในครั้งนี้ คือคานยื่นปลาย Cook Beam ที่ได้รับการปรับปรุงให้มีรูเจาะรับแรงเฉือนกระทำที่ปลายคานด้านไกล

1.4 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 เข้าใจทฤษฎีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมสำหรับปัญหาความเค้นและความเครียดในระนาบ 2 มิติของของแข็งรวมทั้งผลของความไม่สม่ำเสมอของความยาวด้านของเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่มีต่อประสิทธิภาพในการคำนวณ

1.4.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ต้นแบบ สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นและความเครียดของของแข็งในระนาบสองมิติด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 พื้นฐานกลศาสตร์ของวัสดุ (Mechanic of Material)

สมบัติเชิงกลของวัสดุ เช่น ความแข็ง (Hardness) ความแข็งแรง (Strength) ความยืดหยุ่น (Elasticity) ความเหนียว (Ductility) ความล้า (Fatigue) การคืบ (Creep) และอื่นๆ เป็นสิ่งที่บ่งบอกความสามารถในการตอบสนองเมื่อได้รับแรงภายนอกที่มากระทำ เช่น แรงดัน แรงกด หรือแรงกระแทก เมื่อได้รับแรงที่มากระทำแล้ว วัสดุจะพยายามปรับตัวเพื่อลดผลของแรงที่มากระทำเหล่านั้นโดยการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเช่น หดเข้าเมื่อได้รับแรงกด หรือยืดออกเมื่อได้รับแรงดึง บางครั้งอาจสูญเสียสภาพเดิมหรือแตกหักเสียหายถ้าแรงที่มากระทำต่อวัสดุนั้นเกินกว่าวัสดุจะรับได้ ในงานวิศวกรรมสมบัติเชิงกลมีความสำคัญมากที่สุด เพราะเมื่อเราพิจารณาเลือกใช้วัสดุใดๆก็ตาม สิ่งแรกที่นำมาพิจารณาคือสมบัติเชิงกลของวัสดุ ซึ่งแบ่งออกเป็นหัวข้อหลักๆดังนี้

2.1.1 ความเค้น (Stress)

ความเค้นเป็นคุณสมบัติเชิงกลพื้นฐานที่แสดงลักษณะของแรงภายในภายในวัสดุเมื่อต้องรับภาระจากภายนอก วัดความเข้มของแรงภายในที่กระจายไปทั่วพื้นที่ที่กำหนด และเป็นตัวแปรสำคัญในการวิเคราะห์พฤติกรรมการเสียรูปและความล้มเหลวของวัสดุ ซึ่งคุณสมบัติทางกลของความเค้น (Stress) ประกอบไปด้วย ความเค้นดึง (Tensile Stress),ความเค้นอัด (Compressive Stress),ความเค้นเฉือน (Shear Stress),ความเค้นคราก (Yield Stress) เป็นต้น

2.1.2 ความเครียด (Strain)

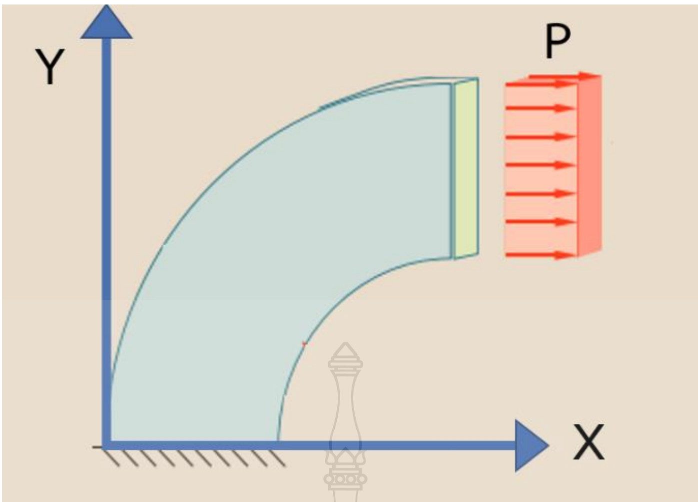
ความเครียดเป็นคุณสมบัติทางกลที่วัดการเสียรูปหรือการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัสดุเมื่อได้รับแรงหรือแรงจากภายนอก เป็นการวัดปริมาณการกระจัดสัมพัทธ์หรือการยืดตัวของจุดต่างๆภายในวัสดุ เมื่อวัสดุถูกแรงมากระทำในลักษณะดึงยืด วัสดุจะมีการเปลี่ยนแปลง ความยาว ความเครียดเป็นอัตราส่วนของความยาวที่เปลี่ยนแปลงต่อความยาว ซึ่งการเปลี่ยนแปลงรูปของวัสดุสามารถแบ่งเป็น 2 ชนิด คือ 1. การเปลี่ยนรูปแบบอิลาสติกหรือความเครียดแบบคืนรูป (Elastic Deformation or Elastic Strain) 2. การเปลี่ยนรูปแบบพลาสติกหรือความเครียดแบบคงรูป (Plastic Deformation or Plastic Strain) โดยนอกจากนี้ยังสามารถหาคุณสมบัติทางกลของความเครียด (Strain) ได้ 2 วิธี คือ 1. ความเครียดเชิงเส้น (Linear Strain) 2.ความเครียดเฉือน (Shear Strain) เป็นต้น

2.1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียดจริง (True Stress-Strain)

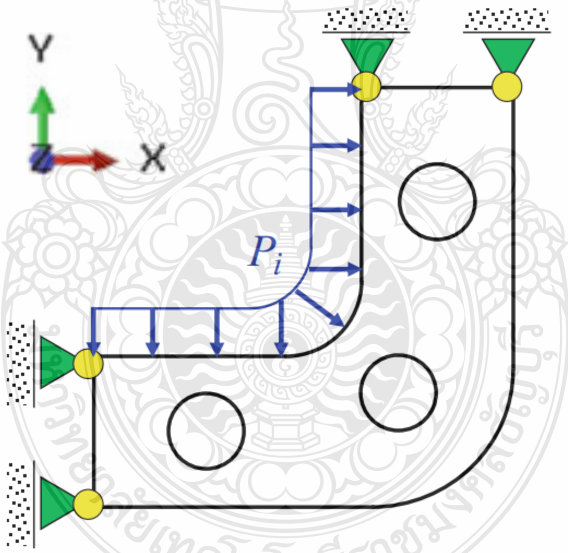
ความเค้น-ความเครียดที่แท้จริงคือการวัดความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นจริงโดยวัสดุระหว่างการเสียรูป โดยคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงในพื้นที่หน้าตัดของวัสดุเมื่อเกิดการเสียรูป ซึ่งแตกต่างจากความเครียดเชิงวิศวกรรมซึ่งใช้พื้นที่หน้าตัดเดิมของชิ้นงานทดสอบ ความเครียดที่แท้จริงจะพิจารณาพื้นที่หน้าตัดที่เกิดขึ้นทันทีและเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง ความเค้นจริง (True Stress) เป็นอัตราส่วนระหว่างแรงที่กระทำบนชิ้นงานทดสอบต่อพื้นที่หน้าตัด ขณะรับแรงกระทำขณะนั้น ความเครียดจริง (True Strain) เป็นผลรวมของอัตราส่วนระหว่างการเปลี่ยนแปลงความยาวต่อความยาวเดิมโดยรวมตั้งแต่ความเครียดของวัสดุก่อนรับแรงจนถึงความเครียดขณะทดสอบ โดยความเค้นเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเครียด ซึ่งความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงนี้ จะเป็นจริงเฉพาะในช่วงยืดหยุ่น สำหรับวัสดุที่เป็นเนื้อเดียวกันและมีคุณสมบัติเท่ากันทุกทิศทาง

2.1.4 สมการอิลาสติค (Elasticity Equations)

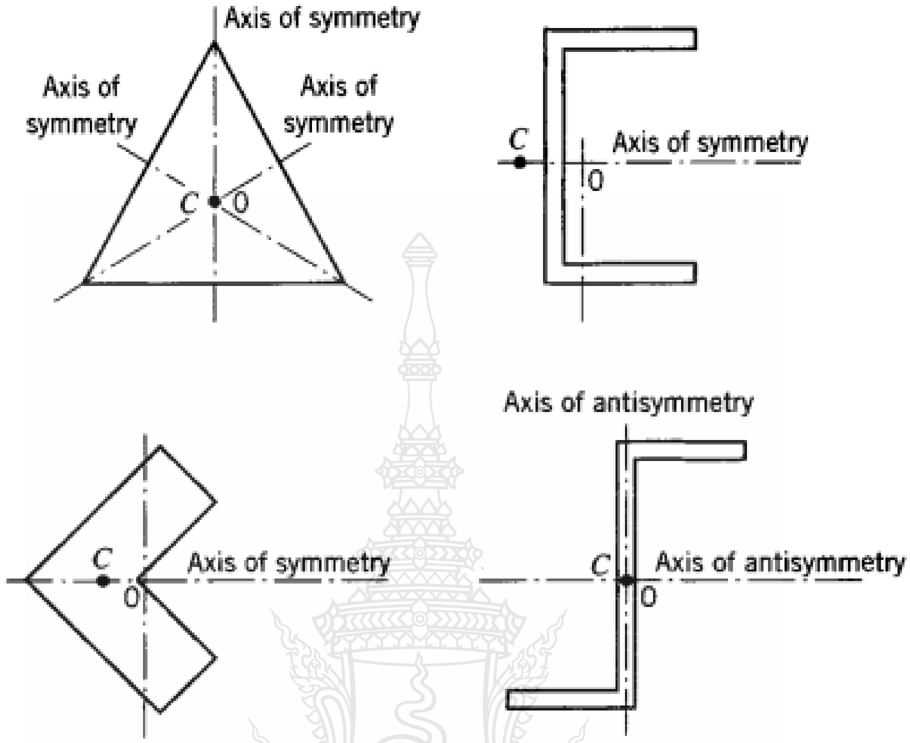
สมการอิลาสติคคือสมการที่ใช้สำหรับบ่งบอกเกี่ยวกับปัญหาทางวิศวกรรมในรูปแบบของความเค้น (Stress) ความเครียด (Strain) สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดจะขึ้นอยู่กับวัสดุที่กำลังพิจารณาในความยืดหยุ่นเชิงเส้นโดยใช้กฎของฮุคเพื่อแสดงความสัมพันธ์นี้ การเคลื่อนที่ (Displacements) เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ข้อจำกัดแรงที่กระทำต่อโครงสร้างที่ขอบเขตหรือส่วนต่อประสาน จำเป็นสำหรับการแก้ปัญหาสมการอิลาสติค เงื่อนไขขอบเขตทั่วไป ได้แก่ การเคลื่อนที่ที่กำหนด แรงที่ใช้ และเงื่อนไขสมมาตร โดยมีสมมุติฐานเงื่อนไขตอนเริ่มต้น (Initial Conditions) คือ ค่าของความเครียดจะมีค่าน้อยมาก (Small Strain) ภายในชิ้นส่วนวัตถุและผลลัพธ์ของความไม่มีเสถียรภาพจากการโก่งตัวด้านข้างจะไม่นำมาพิจารณา ปัญหาที่กล่าวมานั้นการวิเคราะห์ที่แม่นยำและครอบคลุมมักวิเคราะห์ในระบบ 3 มิติ เพราะสามารถวิเคราะห์รูปทรงเรขาคณิตที่ซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพแต่การวิเคราะห์ 2 มิติจะให้แนวทางที่ง่ายกว่า โดยทั่วไปการวิเคราะห์ 2 มิติ สามารถจำแนกออกได้เป็น 3 ประเภท คือ ปัญหาการวิเคราะห์ความเค้นในระนาบ (Plane Stress) ปัญหาการวิเคราะห์ความเครียดในระนาบ (Plane Strain) และปัญหาการวิเคราะห์รูปแบบของความสมมาตรตามแนวแกน (Axisymmetric) ตามรูปที่ 2.1, 2.2, และ 2.3 ตามลำดับ



รูปที่ 2.1 ปัญหาการวิเคราะห์ความเค้นในระนาบ 2 มิติ

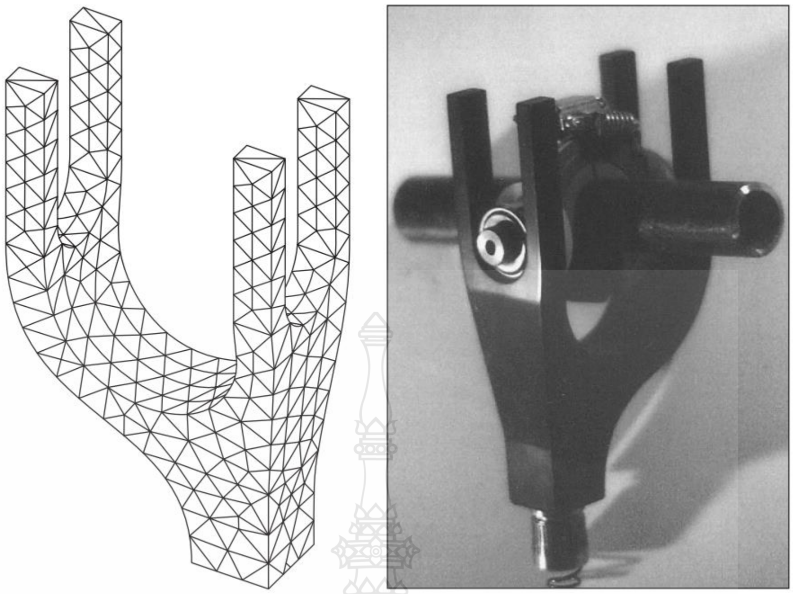


รูปที่ 2.2 ปัญหาการวิเคราะห์ความเครียดในระนาบ 2 มิติ [1]

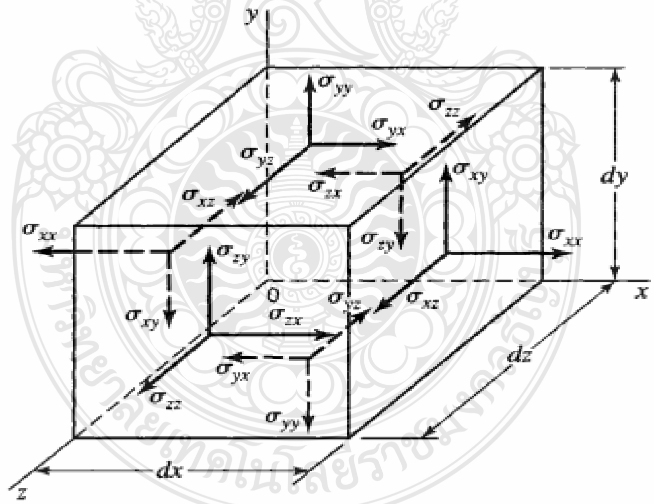


รูปที่ 2.3 ปัญหาการวิเคราะห์รูปแบบของความสมมาตรตามแนวแกน [2]

2.1.5. สมการอิลาสติคสำหรับของแข็งใน 3 มิติ (Elastic Equations For Solids In 3D)



รูปที่ 2.4 แบบจำลองทางกายภาพของของแข็งสำหรับ 3 มิติ [3]



รูปที่ 2.5 การวิเคราะห์องค์ประกอบของความเค้นรูปแบบระบบ 3 มิติ [2]

หากพิจารณาลูกบาศก์ขนาดเล็ก ๆ ซึ่งมีปริมาตรเป็น dV ดังแสดงในรูปที่ 2.5 พบว่าด้านทั้งหกของพื้นผิวซึ่งตั้งฉากกับแกนทั้งสามนั้น ประกอบไปด้วย องค์ประกอบของความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) และองค์ประกอบของความเค้นเฉือน (Shear Stress) ตามแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ ทิศทางของความเค้นที่ปรากฏในรูปนั้น จะถูกกำหนดให้มีเครื่องหมายเป็นบวกทั้งหมด องค์ประกอบของความเค้นและความเครียดทั้ง 6 ค่า ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}\}^T \tag{2.1}$$

$$\epsilon = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\}^T \tag{2.2}$$

โดยความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่งทั้งสามแกน สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u}{\partial y}, \epsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.3}$$

เมื่อ u, v และ w คือการเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทางแกน x, y และ z ตามลำดับ ในทางกลศาสตร์ นิยมเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่งโดยใช้เมทริกซ์โอเปอเรชั่นที่เรียกว่า Differential Operator, ***L***, ซึ่งสามารถเปลี่ยนสมการที่ (2.3) ให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$\epsilon = LU, \qquad U = \{u, v, w\}^T \tag{2.4}$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

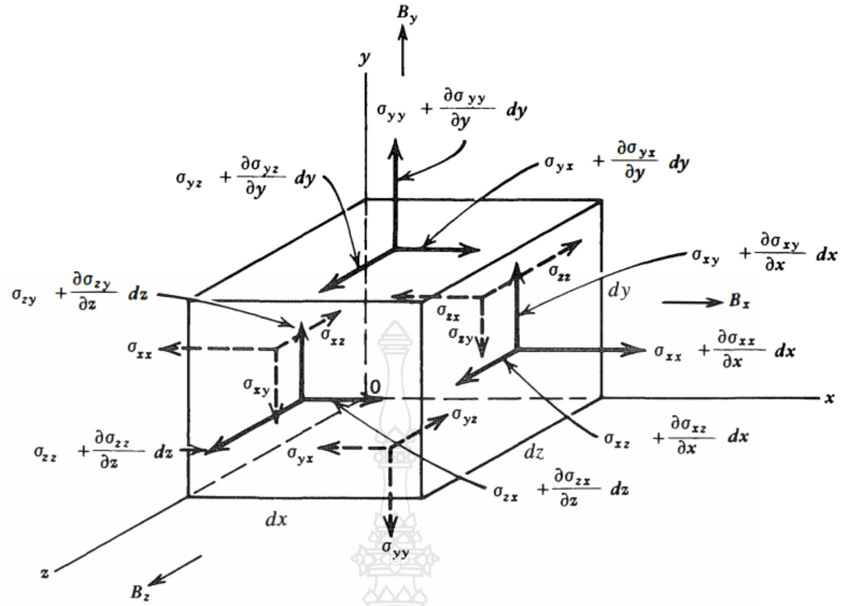
เมื่อ ***U*** คือเวคเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง และ ***L*** เป็นเมทริกซ์โอเปอเรชั่นแสดงได้ดังสมการที่ (2.5)

สุดท้าย สมการซึ่งใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียด (Constitutive Equation) ของของแข็งที่มีพฤติกรรมในช่วงอิลาสติคแบบเชิงเส้น (Linear Elasticity) สามารถแสดงได้เป็น

$$\sigma = E\epsilon \qquad (2.6)$$

2.1.6 สมการสมดุลทางไดนามิกส์ (Dynamics Equilibrium Equations)

สมการสมดุลทางไดนามิกส์ของของแข็งนั้น สามารถเขียนได้โดยการพิจารณาความสมดุลของเอลิเมนต์ลูกบากศ์ดังในรูปที่ 2.6 ซึ่งหาได้จากการพิจารณารวมผลของแรงเฉือย (Inertia Forces) เนื่องจากการเคลื่อนที่ของวัตถุเข้าไปในรูปที่ 2.5 นั่นเอง เพราะฉะนั้น สมการสมดุลไดนามิกซ์ในทิศทางแกน X สามารถเขียนได้จากผลรวมของแรงทั้งหมดและแสดงได้เป็น



รูปที่ 2.6 สมดุลขององค์ประกอบของความเค้นในลูกบาศก์ [2]

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_{xx} dydz + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dx\right) dxdz - \sigma_{yx} dxdz + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dx\right) dxdy - \sigma_{zx} dxdy + f_x dxdydz = \rho \ddot{u} dxdydz \tag{2.7}$$

โดยเทอมทางด้านขวามือของสมการ หมายถึงเทอมที่ได้มาจากแรงเฉื่อย $\ddot{u}$ ในขณะที่เทอมซึ่งมีตัวแปร f_x หมายถึง เทอมที่เกิดจากแรงกระทำภายนอกนั่นเอง สมการที่ (2.7) สามารถจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่ายเสียใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_x = \rho \ddot{u} \tag{2.8}$$

ในลักษณะเดียวกัน สมการความสมดุลไดนามิกซ์ในทิศทางของแกน Y และ Z ก็สามารถเขียนโดยการรวมแรงที่เกิดขึ้นทั้งหมดเข้าด้วยกัน นั่นคือ สามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้คือ

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_y = \rho \ddot{v} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho \ddot{w} \quad (2.10)$$

สมการสมดุลทั้ง 3 สมการดังกล่าวข้างต้น สามารถนำมาเขียนรวมกันให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ทั่วไปอย่างย่อได้เป็น

$$L^T \sigma + f_b = \rho \ddot{U} \quad (2.11)$$

หากทำการเปลี่ยนค่าของความเค้นในสมการที่ 2.11 ให้อยู่ในรูปของการเปลี่ยนตำแหน่งผ่านสมการที่ 2.4-2.6 แล้ว สมการที่ 2.11 จะเปลี่ยนรูปเป็น

$$L^T ELU + f_b = \rho \ddot{U} \quad (2.12)$$

สมการที่ (2.12) คือสมการรูปทั่วไปของสมการสมดุลไดนามิก (Dynamics Equilibrium Equation) สำหรับของแข็งซึ่งสามารถใช้ได้กับทั้งปัญหาในสองและสามมิติ สำหรับกรณีที่แรงกระทำภายนอกต่อของแข็งเป็นแรงประเภทสถิตยศาสตร์ (Static Loads) เพียงอย่างเดียวนั้น สมการทั่วไปของสมดุลทางสถิตย์สำหรับของแข็ง สามารถแสดงได้ด้วยการกำหนดให้ค่าของแรงเฉื่อยซึ่งอยู่ทางด้านขวามือของสมการที่ 2.12 มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้ว่า

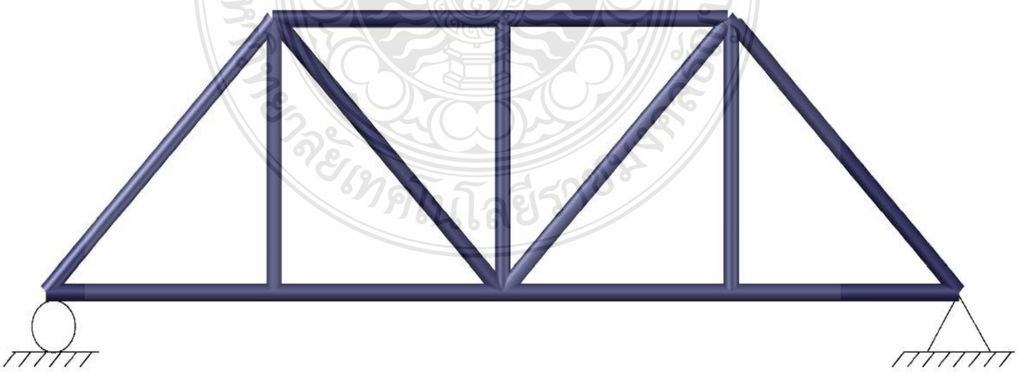
$$L^T \sigma + f_b = 0 \quad (2.13)$$

สมการที่ (2.13) คือสมการที่นิยมเรียกกันว่าคือ “Strong Form” ของสมการอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาของแข็ง สมการดังกล่าว มีความหมายว่า ผลเฉลยของตัวแปรหลัก (Primary Variables) ที่ต้องการทราบค่าในสมการที่ (2.13) นั้น เมื่อถูกแทนค่าลงไปแล้ว จะต้องทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าที่อยู่ภายใต้ขอบเขตของปัญหาที่กำลังสนใจหรือศึกษาอยู่นั่นเอง

2.2 พื้นฐานการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Fundamentals of Finite Element Analysis)

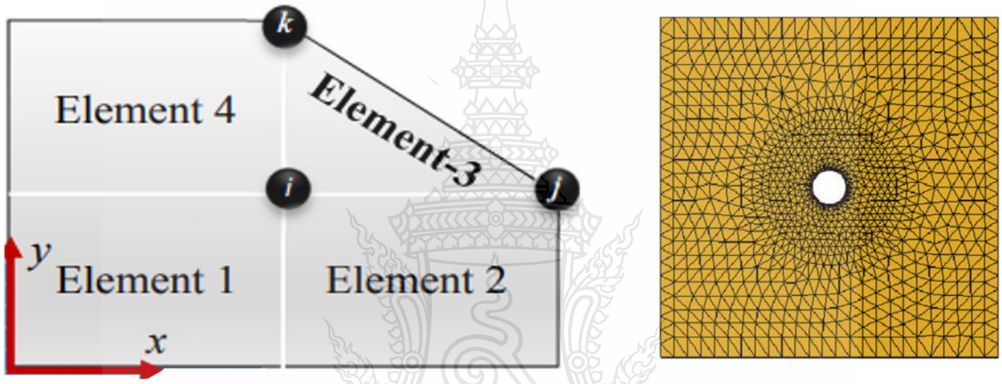
2.2.1 การแยกย่อยส่วนประกอบและการเลือกประเภทเอลิเมนต์ (Discretization and Selection of Element Types)

การแยกย่อยส่วนประกอบเกี่ยวข้องกับการแบ่งโดเมนหรือโครงสร้างที่ต่อเนื่องออกเป็นเอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนจำกัด สิ่งนี้ทำเพื่อลดความซับซ้อนของปัญหาและทำให้มันสอดคล้องกับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขตัวแปรต่อเนื่องเช่น การเคลื่อนที่ อุณหภูมิ หรือความดัน จะถูกประมาณค่าภายในแต่ละเอลิเมนต์โดยใช้เทคนิคการประมาณค่ายกตัวอย่างเช่น ในการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์โดเมนจะถูกแบ่งออกเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมจัตุรัสในแบบ 2 มิติ แต่ละเอลิเมนต์มีชุดของโหนดและตัวแปรที่น่าสนใจจะถูกประมาณโดยใช้ฟังก์ชั่นรูปร่าง จากนั้นจึงนำสมการที่ใช้บังคับมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา การเลือกประเภทเอลิเมนต์เกี่ยวข้องกับการเลือกรูปร่างและการกำหนดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมเพื่อแสดงพฤติกรรมทางกายภาพของปัญหาได้อย่างถูกต้อง เอลิเมนต์ต่างชนิดกันมีข้อดีและข้อจำกัดแตกต่างกันไปตามลักษณะของปัญหายกตัวอย่างเช่น ในไฟไนต์เอลมิเมนต์มีเอลิเมนต์ประเภทต่างๆให้เลือกเช่น เอลิเมนต์แบบแท่งและแบบคาน (Bar and Beam Elements) เป็นต้น การเลือกประเภทเอลิเมนต์ขึ้นอยู่กับปัจจัยต่างๆ เช่น รูปทรงเรขาคณิต พฤติกรรมของวัสดุ เงื่อนไขขอบเขตและความแม่นยำที่จำเป็นสำหรับการวิเคราะห์ เอลิเมนต์แบบแท่งนั้นง่ายกว่าและมีประสิทธิภาพในการคำนวณ เอลิเมนต์แบบนี้นิยมใช้สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของโครงถักและโครงข้อแข็ง ดังแสดงในรูปที่ 2.7

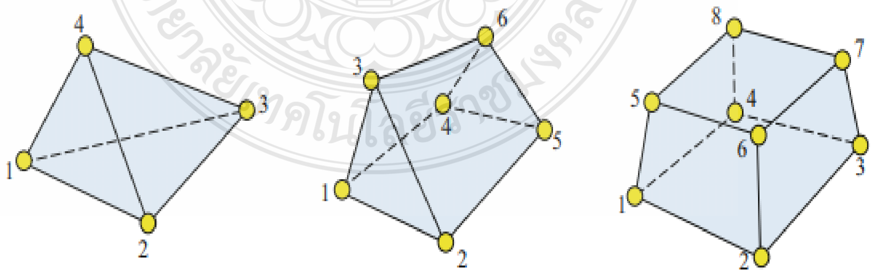


รูปที่ 2.7 เอลิเมนต์แบบแท่ง

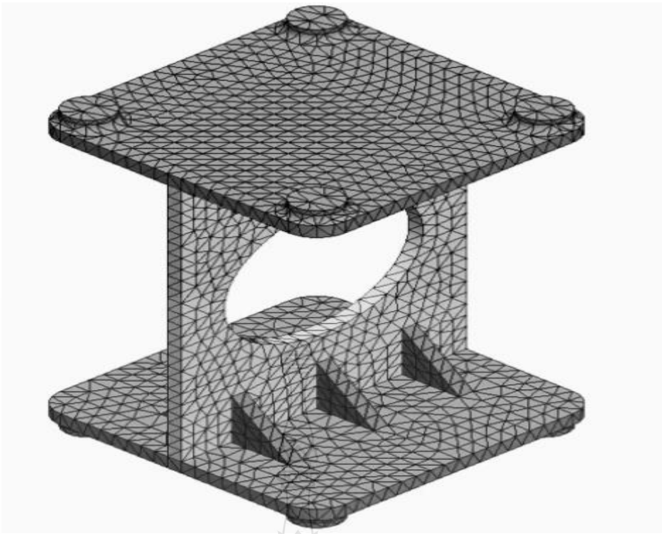
เอลิเมนต์พื้นฐานสำหรับความเค้นหรือความเครียดจะมีลักษณะรูปร่างเป็นรูปทรงสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมในระนาบ 2 มิติ เอลิเมนต์ที่นิยมวิเคราะห์อย่างง่ายที่สุด เรียกว่า เอลิเมนต์เชิงเส้นรูปสามเหลี่ยม (Linear Triangular Element) และเอลิเมนต์เชิงเส้นคู่รูปสี่เหลี่ยม (Bilinear Quadrilateral Element) ดังแสดงในรูปที่ 2.8 ส่วนปัญหาใน 3 มิตินั้น เอลิเมนต์พื้นฐานจะลักษณะเป็นรูปทรง 3 มิติ 4 หน้า (Tetrahedral Element) หรือทรง 6 หน้า (Hexahedral Element) ดังรูปที่ 2.9 และ 2.10 ตามลำดับ



รูปที่ 2.8 เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมใน 2 มิติ [4]



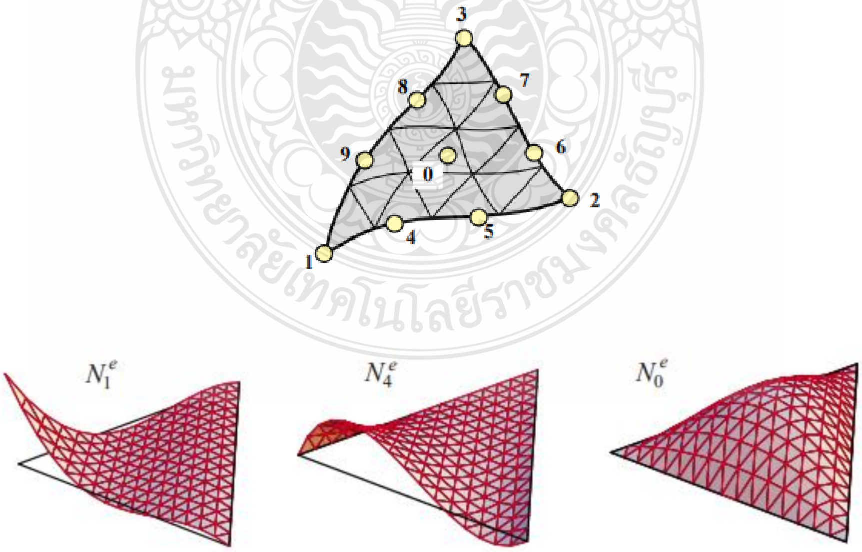
รูปที่ 2.9 เอลิเมนต์สำหรับปัญหา 3 มิติ [1]



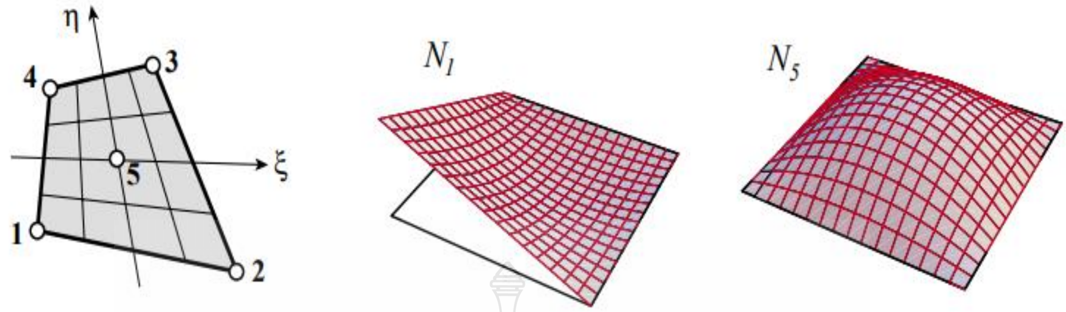
รูปที่ 2.10 เอลิเมนต์สำหรับปัญหา 3 มิติ

2.2.2 การเลือกฟังก์ชั่นของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Select Displacement Functions)

เป็นกระบวนการเลือกตำแหน่งใหม่หรือเปลี่ยนตำแหน่งภายในเอลิเมนต์ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นที่กำหนดตำแหน่งใหม่ที่โหนดของเอลิเมนต์ ฟังก์ชันนี้สามารถมีรูปแบบต่างๆ ได้หลากหลาย ขึ้นอยู่กับจำนวนโหนดในเอลิเมนต์ ฟังก์ชั่นเชิงเส้นอย่างง่ายสำหรับองค์ประกอบสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม แสดงดังในรูปที่ 2.11 และ 2.12 ตามลำดับ



รูปที่ 2.11 ฟังก์ชั่นการประมาณภายในของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม [5]



รูปที่ 2.12 ฟังก์ชั่นการประมาณภายในของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม [5]

2.2.3 กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของความเครียดและความเค้นกับความเครียด (Define Strain-Displacement and Stress-Strain Relationships)

สร้างสมการความสัมพันธ์ของความเค้น-การเปลี่ยนตำแหน่งและสมการความเค้น-ความเครียด หลักการสร้างสมการความสัมพันธ์ดังกล่าวนั้น ได้กล่าวถึงแล้วในหัวข้อที่ 2.1.5

2.2.4 Derive Element Stiffness and Equations

เป็นขั้นตอนการของการสร้างสมการสติฟเนสในระดับเอลิเมนต์ โดยเป็นขั้นตอนของการหาสมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่เกิดขึ้น ณ จุดต่อของชิ้นส่วนกับการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่อของมันโดยอาศัยความสัมพันธ์ในหัวข้อที่ 2.2.3 สมการสติฟเนสของเอลิเมนต์ในรูปของเมทริกซ์อย่างย่อเขียนได้ว่า

$$\{f\} = [k]\{d\} \tag{2.14}$$

เมื่อ $\{f\}$ คือเวคเตอร์ของแรงที่จุดต่อของเอลิเมนต์ $[k]$ คือสติฟเนสของเอลิเมนต์ในรูปของเมทริกซ์ โดยทั่วไป จะมีคุณสมบัติความสมมาตรของเมทริกซ์ และ $\{d\}$ คือเวคเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของจุดต่อของเอลิเมนต์

2.2.5 กระบวนการประกอบ (Assembly Process)

เป็นขั้นตอนของการนำสมการสติฟเนสของแต่ละเอลิเมนต์มารวมกันพร้อมกันนั้น ก็ทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ให้กับปัญหาเพื่อป้องกันการเคลื่อนที่แบบวัตถุ

แข็งเกร็ง ขั้นตอนนี้จะทำให้ได้สติฟเนสรวมของระบบ (Global Stiffness Matrix) สมการสติฟเนสรวมของระบบนี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์อย่างย่อได้เป็น

$$\{F\} = [K]\{d\} \tag{2.15}$$

เมื่อ $\{F\}$ คือเวคเตอร์ของแรงที่จุดต่อของทุกเอลิเมนต์ในระบบโคออร์ดิเนตหลัก (Global Coordinate System) $[K]$ คือสติฟเนสเมทริกซ์รวมของระบบในรูปของเมทริกซ์สมมาตร และ $\{d\}$ คือเวคเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของจุดต่อทั้งหมดในระบบโคออร์ดิเนตหลักเช่นเดียวกันนั่นเอง

2.2.6 การแก้ระบบสมการ (Equation System Solving)

ทำการแก้สมการระบบสมการเชิงเส้นที่ 2.15 เพื่อหาค่าของตัวแปร ในที่นี้คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของโหนดทั้งหมด ซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่านั่นเอง

2.2.7 การหาค่าความเค้นและความเครียด (Stresses and Strains Evaluation)

เมื่อทราบค่าของการเปลี่ยนตำแหน่ง ณ จุดต่อของเอลิเมนต์ทั้งหมดแล้ว ก็สามารถคำนวณเพื่อหาค่าของความเครียดและความเค้นของแต่ละเอลิเมนต์ได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่งและสมการความเค้นความเครียดได้ต่อไป

2.2.8 การแสดงผลหลังการคำนวณ (Post-Processing)

ขั้นตอนสุดท้ายนี้ เป็นขั้นตอนของการแสดงผลลัพธ์ที่คำนวณได้ทั้งหมด ได้แก่ ความเค้น ความเครียด การเปลี่ยนตำแหน่ง แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ ฯลฯ เป็นต้น โดยส่วนใหญ่จะทำการแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ออกมาในรูปของตัวเลขหรือกราฟฟิค เพื่อความสวยงามและง่ายต่อการนำไปใช้ประโยชน์ต่อไป

2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สำหรับการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อแก้ปัญหาค่าขอบ (Boundary-Value) ของของแข็งนั้น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมรูปสามเหลี่ยม (Constant Strain Three-Node Triangular Element) และเอลิเมนต์สี่โหนดที่มีสี่ด้าน (Bilinear Four-Node Quadrilateral Element) ถูกใช้งานอย่างแพร่หลาย งานวิจัยด้านการพัฒนาสำหรับเอลิเมนต์ที่เป็นแบบหลายด้านนั้น ยังไม่มากเท่าที่ควรจนกระทั่งถึงปี ค.ศ. 1970 Wachspress [6] ได้เสนอการใช้ฟังก์ชั่นฐานแบบเหตุผลสำหรับเอลิเมนต์แบบหลายเหลี่ยม (Rational Basis Functions) ข้อดีและประโยชน์ที่เป็นไปได้ของการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์หลายเหลี่ยมในการคำนวณนั้นโดดเด่นมากในหลาย ๆ ด้าน กล่าวคือ มีความยืดหยุ่นมากขึ้นในการสร้าง

โครงตาข่ายของรูปทรงเรขาคณิตแบบต่าง ๆ เช่นที่เกิดขึ้นในชีวกลศาสตร์ (Biomechanics) [7] มีความแม่นยำที่ดีกว่าในการแก้ปัญหาเชิงตัวเลข (การประมาณค่าลำดับที่สูงกว่า) เมื่อเทียบกับการใช้โครงตาข่ายรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม มีประโยชน์สำหรับใช้เป็นเอลิเมนต์ตัวเชื่อม (Transition Elements) ในช่วงที่มีการเปลี่ยนแปลงประเภทของเอลิเมนต์ [8] และในการสร้างแบบจำลองของวัสดุโพลีคริสตัลไลน์ [9] มีความไวภายใต้สภาวะการเปลี่ยนรูปเพื่อรักษาปริมาตร (Volumetric-Locking)) ซึ่งเกิดขึ้นจากความยืดหยุ่นที่บีบอัดไม่ได้ที่น้อยกว่าเช่นเดียวกับในความเป็นพลาสติกของ Von Mises (ต่างจากคำตอบที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมักจะมีแนวโน้มที่แข็งกว่า)

การใช้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมใน 2 มิติ (Polygonal/Polyhedral) สำหรับไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น ได้ถูกเสนอโดยนักวิจัยหลายกลุ่ม โดยมีชื่อเรียกที่แตกต่างกันออกไป Ghosh และ Mukhopadhyay [9] และ Ghosh และ Moorthy [9] ได้เสนอเทคนิคในการสร้างแบบจำลองและทำการจำลองโพลิคริสตัลไลน์เฟอร์โรอิเล็กทริก (Polycrystalline Feeroelectrics) โดยใช้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมซึ่งถูกกำหนดขึ้นจากการใช้เซลล์ Voronoi เรียกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของเซลล์โวโรนอย (Voronoi Cell Finite Element Method) VCFEM ได้ถูกนำไปใช้ในงานต่าง ๆ เช่น ในการวิเคราะห์วัสดุต่างชนิดกัน [10], การหาค่าคุณสมบัติยืดหยุ่นที่มีประสิทธิผลรวมทั้งรอยแตกที่มีประสิทธิภาพของ Functionally Graded Materials [11] วิธีการนี้ได้ถูกนำไปใช้ในการวิเคราะห์แบบ 3 มิติด้วย [12]

ประมาณปี ค.ศ. 2000 วิธี Wachspress ได้รับความสนใจมากขึ้นและใช้ควบคู่ไปกับเทคนิคอื่น ๆ เพื่อกำหนดฟังก์ชันรูปร่างสำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม เทคนิคเหล่านี้เรียกว่าวิธีพิกัด Barycentric [13] และให้ฟังก์ชันรูปร่างที่ซับซ้อนซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันตรรกยะ ลอการิทึม และตรีโกณมิติ ไม่นานมานี้ ฟังก์ชันพหุนาม Spline (ฟังก์ชัน Bernstein Bezier) ถูกนำมารวมอยู่ในวิธีพิกัด Barycentric [14] เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจากวิธีการเหล่านี้ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์และรู้จักกันในชื่อวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่สอดคล้องกัน (Polygonal Finite Element Method, PFEM) วิธีพิกัด Barycentric บางวิธีที่ใช้ใน PFEM ได้แก่ Inverse Bilinear Coordinates [15], Wachspress [16], Mean Value Coordinates [17], Harmonic Coordinates [18], Matrix Coordinates [19] และ Natural Neighbor-Based Coordinates (ฟังก์ชันรูปร่าง Laplace) [13] บางวิธีการเช่น Wachspress, Mean Value และ Harmonic Coordinates ได้ถูกประยุกต์ให้สามารถใช้ได้ใน 3 มิติ [20] , [21]

เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมตามพิกัด Barycentric ถูกนำมาใช้ในหลากหลายส่วน เช่น คอมพิวเตอร์กราฟิก แอนิเมชั่น และ การสร้างแบบจำลองทางเรขาคณิต [14] การวิเคราะห์แผ่นที่มีรูเจาะ [22] การแตกหักของวัสดุ [23] การสร้างแบบจำลองของหินและอื่นๆ ไม่นานมานี้ยังมีการใช้พิกัด Barycentric ในการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนแบบคงที่และอิสระของแผ่นคอมโพสิตแบบลามิเนต [24]

การเพิ่มประสิทธิภาพโทโพโลยีหลายวัสดุ (Multimaterial Topolygy Optimization) [25] ปัญหาแผ่น Reissner-Mindlin [26] และปัญหาการนำความร้อนชั่วคราว [27]

ได้มีการตรวจสอบพิกัด Barycentric แบบอื่น เช่น พิกัดปัวซอง (Poisson Coordinates) [28] พิกัดเขียว (Green Coordinates) การสร้างพิกัดเขียวขึ้นใหม่โดยใช้ทฤษฎีบทของ Cauchy (Reconstructions of Green Coordinates by Cauchy’s Theorem) การย้ายพิกัดกำลังสองน้อยที่สุด (Moving Least Squares Coordinates) และการพยายามออกแบบวิธีการใหม่ผ่านค่าที่ซับซ้อน (Complex Representation) ของ Real-Valued Barycentric Coordinates [15]

อย่างไรก็ตาม การประเมินพิกัด Barycentric นั้นไม่ง่ายหรือไม่มีประสิทธิภาพเมื่อเทียบกับ FEM แบบ Displacement-Based ดั้งเดิมอันเนื่องมาจากฟังก์ชั่นที่ซับซ้อนที่เกิดขึ้น นอกจากนี้พิกัด Barycentric ยังไม่มีประสิทธิภาพสำหรับการสร้างเมทริกซ์สติฟเนสที่เกี่ยวข้องกับผลเฉลยแบบอ่อน (Weak Solutions) ของสมการปัวซองด้วย [14]

บทที่ 3
วิธีการวิจัย

3.1 การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (Polygonal Finite Element Analysis)

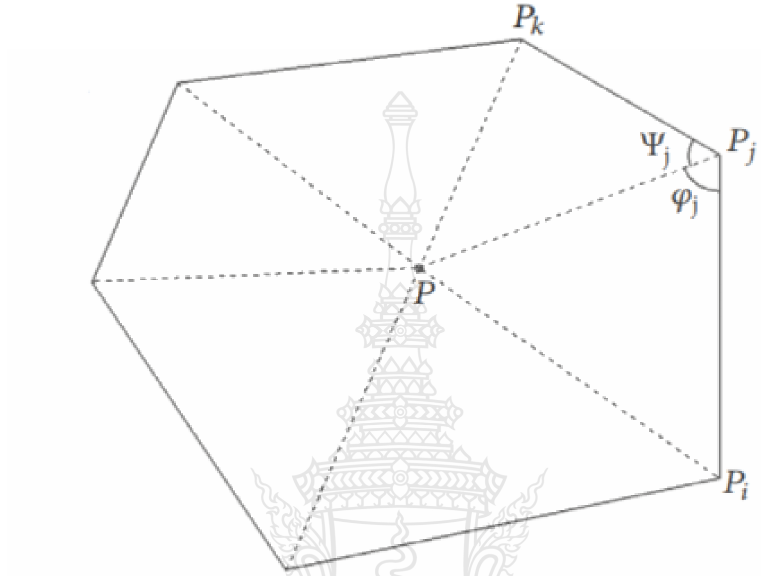
การวิเคราะห์ปัญหาความเค้นหรือความเครียดในระนาบสองมิติสำหรับของแข็งด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนั้น มีขั้นตอนหลักของการวิเคราะห์ที่เหมือนกับการวิเคราะห์ไฟไนท์เอลิเมนต์ทุกประการตั้งแต่การสร้างโครงตาข่ายทั่วทั้งขอบเขตของปัญหา กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่กับความเครียดและความเค้นกับความเครียด ขั้นตอนการของการสร้างสมการสติฟเนสในระดับเอลิเมนต์ ขั้นตอนการนำสมการสติฟเนสของแต่ละเอลิเมนต์มารวมกัน (Assembly) พร้อมการกำหนดเงื่อนไขขอบ (Boundary Conditions) เพื่อป้องกันการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid Body Motions) แก้ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรสำหรับการเคลื่อนที่ของจุดต่อ คำนวณหาค่าความเค้นและความเครียดและแสดงผลออกมาในที่สุดดังรายละเอียดในบทที่ 2 นั้น ขั้นตอนที่แตกต่างอย่างชัดเจนระหว่างทั้ง 2 วิธีดังกล่าวคือ ขั้นตอนของการสร้างฟังก์ชั่นรูปร่างซึ่งจะถูกนำไปคำนวณหาสติฟเนสต่อไป ในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเป็นการสร้างสนามความเครียดที่เข้ากันได้ (Compatible Strain Field) ซึ่งจะถูกประมาณค่าจากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเปลี่ยนตำแหน่ง (Strain-Displacement Relation) โดยตรง ในขณะที่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนั้น ฟังก์ชั่นรูปร่างสำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนั้น จะถูกสร้างขึ้นมาจากพื้นฐานของ Wachspress Function โดยตรง สำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมในระนาบโคออร์ดิเนต x-y ดังแสดงในรูปที่ 3.13 ฟังก์ชั่นรูปร่าง $\phi_i(x,y)$ สามารถหาได้ด้วยสมการ

$$\emptyset_j(x,y) = \frac{w_j(x,y)}{\sum_{k=1}^{n} w_k(x,y)} \tag{3.16}$$

และ

$$w_j(x,y) = \frac{A(p_i,p_j,p_k)}{A(p,p_i,p_j)A(p,p_j,p_k)} \tag{3.17}$$

เมื่อ A คือพื้นที่ของสามเหลี่ยมซึ่งล้อมรอบด้วยโหนดทั้งสามที่อยู่ภายในวงเล็บ p_i, p_j, p_k คือโหนดที่อยู่ภายนอกของรูปหลายเหลี่ยมและ p คือโหนดซึ่งอยู่ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนั่นเอง



รูปที่ 3.13 การสร้างฟังก์ชั่นรูปร่างจาก Wachspress

3.2 การสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม

3.2.1 การสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมจากเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมโดยตรง

การสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมเกิดจากการสร้างเอลิเมนต์ย่อยรูปสามเหลี่ยมในโดเมนของปัญหา 2 มิติ โดยโปรแกรม DistMesh [29] ขั้นตอนแรกทำการกำหนดจุดเซนทรอยด์ (Centroids) ของเอลิเมนต์ย่อยและกำหนดจุดกึ่งกลาง (Center) ของเอลิเมนต์ที่ขอบของโดเมนเพื่อสามารถทำให้เกิดการเชื่อมต่อกันได้ ซึ่งการเชื่อมต่อกันจะเกิดขึ้นระหว่างจุดเซนทรอยด์เอลิเมนต์ของเอลิเมนต์ย่อยเข้ากับจุดกึ่งกลางเอลิเมนต์ที่ขอบ และจุดเซนทรอยด์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์ย่อยเชื่อมต่อกัน ขั้นตอนสุดท้ายทำการลบด้านและโหนดทั้งหมดที่อยู่ภายในโดเมนของปัญหา จะทำให้ได้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมดังรูปที่ 3.14

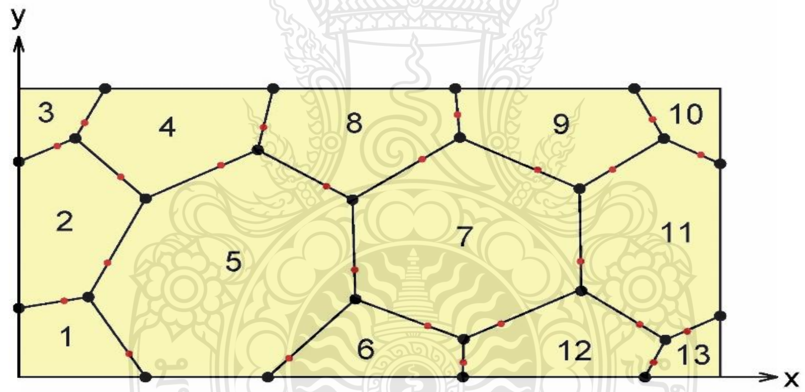
3.2.2. การสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมโดยตรงด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูป (In-house Code)

การสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมโดยตรงในโดเมนของปัญหา 2 มิติปัจจุบันนักวิจัยได้มีการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูป เข้ามาพัฒนาการสร้างรูปเอลิเมนต์แบบเฉพาะ ซึ่งทำการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมโดยตรง ยกตัวอย่างเช่น PolyMesher [30], PolyTop [31], Neper [32] เป็นต้น

งานวิจัยนี้ ทำการศึกษาการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมโดยวิธีที่ 3.2.1 การสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมจากเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมโดยตรงในโดเมนของปัญหาที่กำหนด

3.3 ความไม่สม่ำเสมอของความยาวด้านของเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม

งานวิจัยนี้ ทำการศึกษาผลของความไม่สม่ำเสมอของความยาวด้านของเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่มีต่อความถูกต้องรวมทั้งอัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาสำหรับการทดสอบ งานวิจัยนี้กำหนดให้อัตราส่วนความยาวด้านแทนด้วยสัญลักษณ์ α โดยด้านของเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมจะถูกเพิ่มโหนดเข้าไปแบ่งย่อยเพื่อให้มีอัตราส่วนความยาว (Length Ratio) ตามที่กำหนดซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0.1-0.5 ตัวอย่างความไม่สม่ำเสมอของอัตราส่วนความยาวด้านสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.14

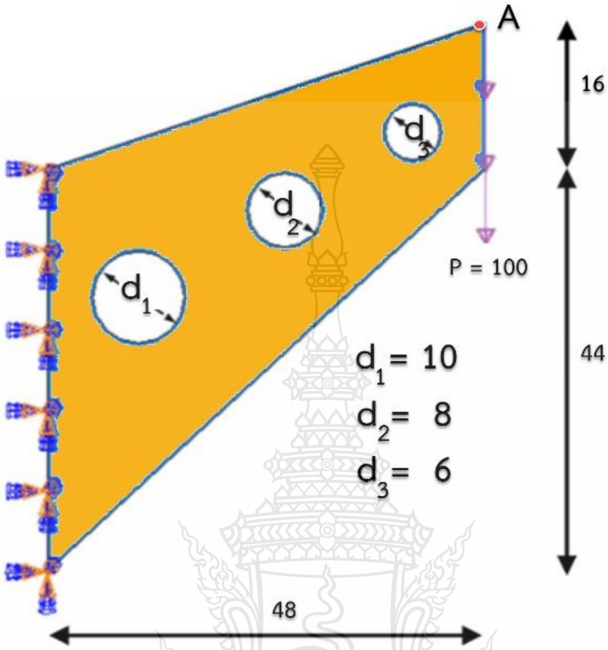


รูปที่ 3.14 ความไม่สม่ำเสมอของอัตราส่วนความยาวด้าน (α) เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม

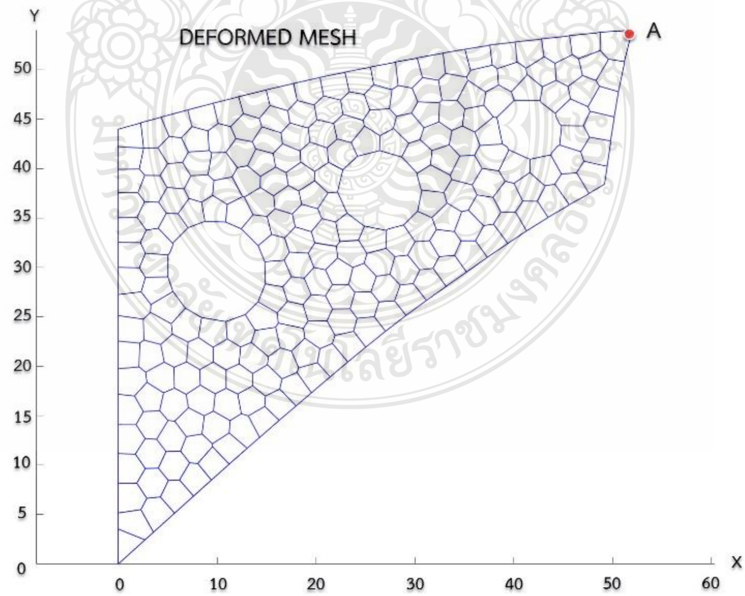
3.3 ปัญหาสำหรับการทดสอบ

งานวิจัยนี้ เป็นการวิเคราะห์คานประเภทคานยื่นปลายของ Cook (Cook's Beam) ซึ่งปรับปรุงให้มีรูเจาะเส้นผ่านศูนย์กลางจากใหญ่ไปเล็กขนาด 10, 8 และ 6 หน่วยตามลำดับ ค่าคงที่ของวัสดุคือค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุและอัตราส่วนปัวซองมีค่าเท่ากับ $1X10^9$ นิวตันต่อตารางเมตรและ 0.28 ตามลำดับ รับแรงเฉือนกระทำที่ปลายคานด้านไกลขนาด 100 หน่วย กรณีตัวอย่างนี้จะกำหนดให้คานยื่นมีฐานรองรับที่ขอบเป็นแบบยึดแน่น (Fixed) และในขณะที่ปลายคานด้านขวามือให้มีแรงกระทำในแนวดิ่ง ดังแสดงในรูปที่ 3.15 โดยจะพิจารณาว่าตัวอย่างของคานที่ใช้ในการวิเคราะห์นี้เป็นปัญหาของความเค้น

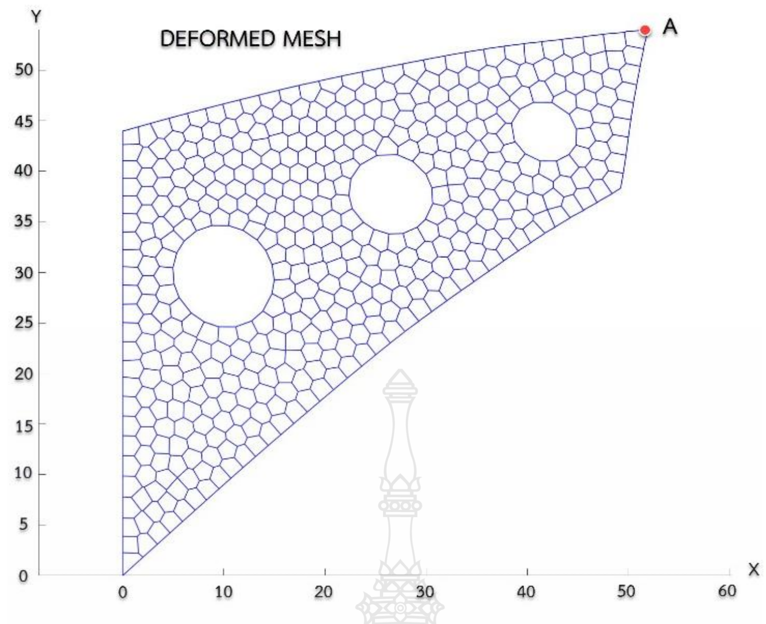
ในระนาบ 2 มิติ ขนาดโครงตาข่ายที่ใช้ประกอบด้วยความละเอียดน้อย ความละเอียดปานกลางและความละเอียดมาก ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 3.16-3.18 ลักษณะของคานยื่นปลายที่มีการเพิ่มจำนวนโหนดลงไปในเอลิเมนต์ที่มีอัตราส่วนความยาวด้าน (α) ตามขอบเขตการศึกษา ดังแสดงในรูปที่ 3.19



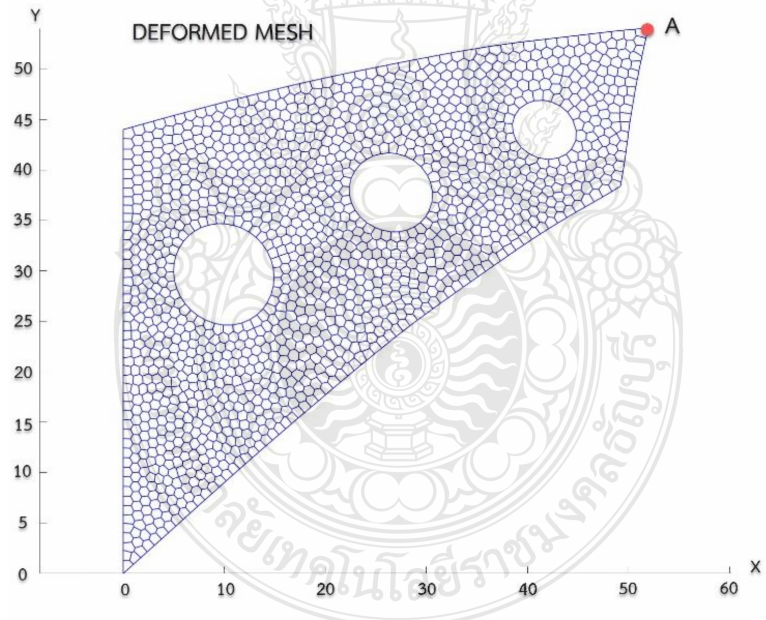
รูปที่ 3.15 คานยื่นปลายของ Cook’s Beam ซึ่งปรับปรุงให้มีรูเจาะ



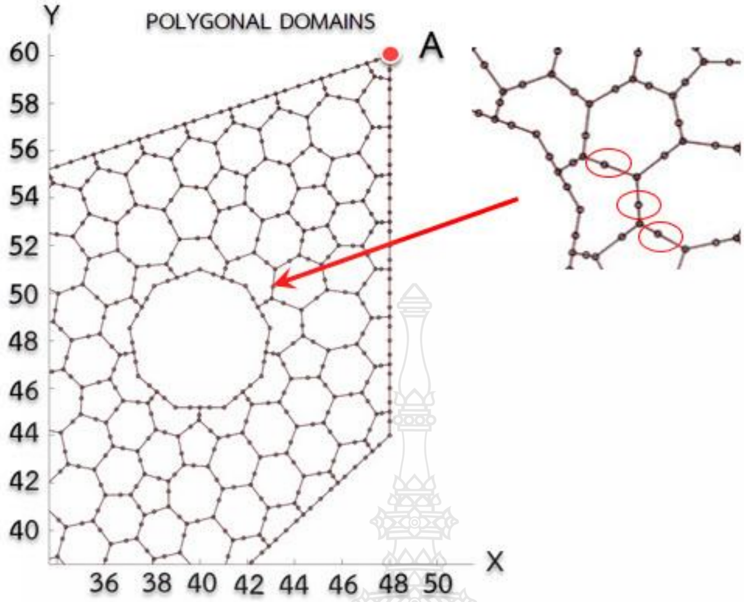
รูปที่ 3.16 โครงตาข่ายที่มีความละเอียดน้อย (Element 210)



รูปที่ 3.17 โครงตาข่ายที่มีความละเอียดปานกลาง (Element 445)



รูปที่ 3.18 โครงตาข่ายที่มีความละเอียดมาก (Element 1477)



รูปที่ 3.19 การเพิ่มโหนดลงไป ณ ตำแหน่ง 0.3 ของความยาวด้านเดิมของเอลิเมนต์สำหรับโครงตาข่ายความละเอียดปานกลาง

บทที่ 4
ผลการศึกษาวิเคราะห์

การวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมผลลัพธ์เชิงตัวเลขทำการควบคุมขนาดโครงตาข่ายจะนำไปใช้เพื่อเปรียบเทียบกับค่าที่วิเคราะห์ได้ทางทฤษฎีได้แก่ ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง (Displacement) ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement Error Norms) ค่าของความเครียด (Strains) ค่าของความเค้น (Stresses) และอัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นตรง (Close-to-Exact Solution) ผลการศึกษาดังกล่าว มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

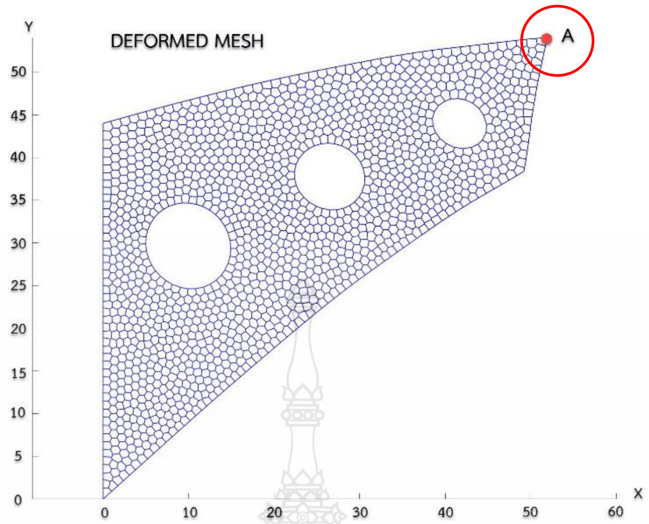
4.1 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคานและค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

ผลลัพธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งของคานยื่นปลาย (Cook’s Beam) ที่น่าศึกษา คือค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง ทำการเปรียบเทียบค่าดังกล่าว ณ ตำแหน่งที่จุด A ปลายคานด้านไกลจะแสดงไว้ในรูปที่ 4.20 โดยมีค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสำหรับผลเฉลยแม่นตรง และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง (U_{norm}) สามารถคำนวณได้ตามสมการที่ 4.18 คือ

$$U_{norm} = \frac{\|U_{exact} - U_{analysis}\|}{\|U_{exact}\|} \tag{4.18}$$

เมื่อ U_{exact} และ $U_{analysis}$ คือเวคเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง ที่ได้จากทางทฤษฎีและจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical analysis) ตามลำดับ

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง ณ จุด A สำหรับการวิเคราะห์ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม ให้ความละเอียดโครงของตาข่ายแบ่งเป็น 3 กรณี คือ 210,445,1477 เอลิเมนต์ สำหรับอัตราส่วนของความยาวด้านของเอลิเมนต์ตั้งแต่ 0.1-0.5



รูปที่ 4.20 การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง ณ จุด A (Displacement @ A)

ตารางที่ 4.1 ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง ณ จุด A

Element	Nodes	Displacement @ A (m.)				
		α = 0.1	α = 0.2	α = 0.3	α = 0.4	α = 0.5
210	1090	-3.5104E-05	-3.7727E-05	-3.9260E-05	-4.1822E-05	-4.2900E-05
445	2267	-3.6830E-05	-3.9096E-05	-4.1097E-05	-4.2950E-05	-4.4020E-05
1477	7401	-3.6762E-05	-4.0004E-05	-4.3268E-05	-4.4466E-05	-4.4771E-05
7047	8624	-4.5100E-05	-4.5100E-05	-4.5100E-05	-4.5100E-05	-4.5100E-05

ผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นตรง (Close-to-Exact Solution) ที่มีจำนวนเอลิเมนต์ 7047 เอลิเมนต์ซึ่งมีค่าการเปลี่ยนตำแหน่งเท่ากับ -4.5100E-05 เมตร ซึ่งได้จากการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูป (Ansys Student Version) โดยใช้เอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าที่มีจำนวนมากเพียงพอ เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำมากพอที่จะใช้เป็นตัวแทนของผลเฉลยแม่นตรงสำหรับปัญหาดังกล่าว ได้แสดงไว้ในแถวสุดท้ายของตารางที่ 4.1

จากการวิเคราะห์พบว่า ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง ณ จุด A เมื่อพิจารณาจากค่าของอัตราส่วนความสม่ำเสมอความยาวด้านของเอลิเมนต์ α ที่ความละเอียดโครงตาข่ายคงที่ พบว่ามีค่าเพิ่มขึ้นตามค่าของ α ที่เพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.5 และหากเมื่อพิจารณาจากค่าของ α ที่คงที่แล้วนั้น

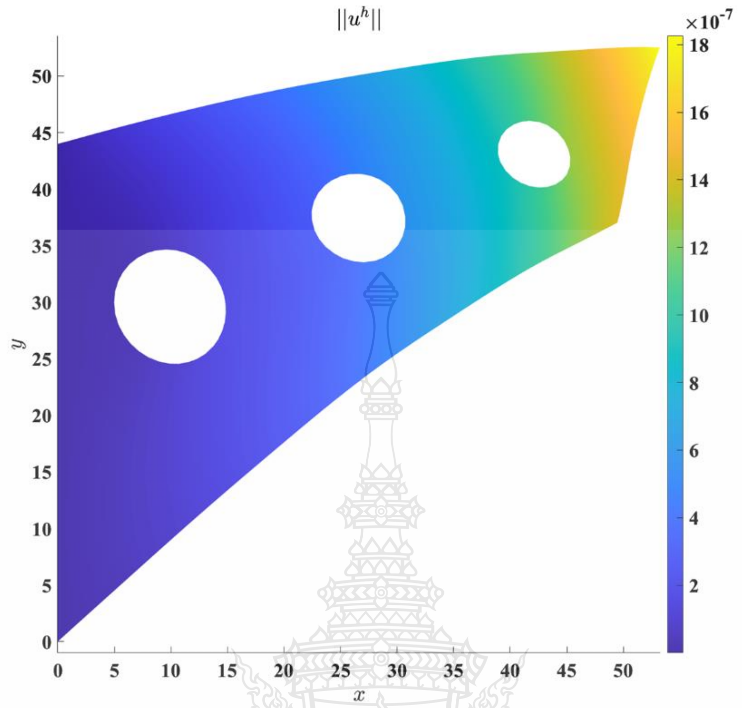
พบว่า ค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง ณ จุดที่กำหนดนั้น มีความแม่นยำเพิ่มขึ้นตามจำนวนของโครงตาข่ายที่เพิ่มขึ้น โดยมีแนวโน้มในลักษณะเดียวกันกับที่พบในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ปกตินั่นเอง โดยค่าผลลัพธ์ที่เข้าใกล้ค่าผลเฉลยแม่นตรงมากที่สุด มีค่าเป็น -4.4700E-05 เมตร ณ โครงตาข่าย 1477 เอลิเมนต์ 7401 โหนดและ α มีค่าเป็น 0.5 นั่นเอง

ตารางที่ 4.2 ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่ง ณ จุด A

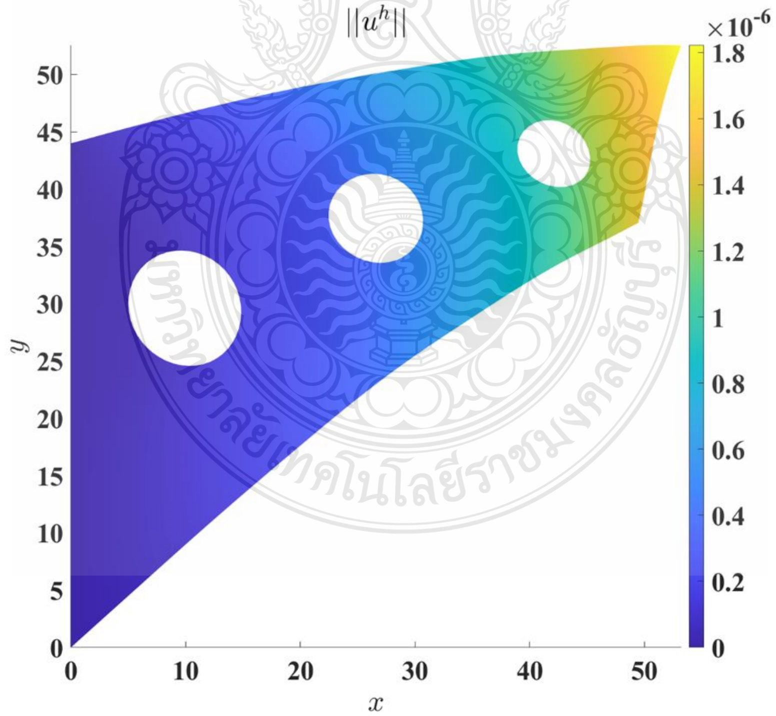
Element	Nodes	Displacement Error Norms				
		α = 0.1	α = 0.2	α = 0.3	α = 0.4	α = 0.5
210	1090	0.22163	0.16347	0.12949	0.07268	0.04878
445	2267	0.18396	0.13312	0.08877	0.04768	0.02395
1477	7401	0.18487	0.11298	0.04061	0.01406	0.00729

สำหรับตารางที่ 4.2 ซึ่งแสดงค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่ง ณ จุด A (Displacement Error Norms) สำหรับโครงตาข่ายและค่า α ต่าง ๆ นั้น พบว่า มีแนวโน้มเช่นเดียวกัน กล่าวคือ เมื่อขนาดของโครงตาข่ายมีความละเอียดมากขึ้น ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานก็มีค่าลดลงตามไปด้วย หากพิจารณาความยาวด้านของเอลิเมนต์ที่มีต่อค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานนั้น ถึงแม้ว่าจะไม่มีผลอย่างมีนัยสำคัญก็ตาม แต่ก็พบว่าค่าของ α (แอลฟา) เท่ากับ 0.5 (ที่ตำแหน่งกึ่งกลางความยาวด้าน) ให้ค่าที่เหมาะสม (Optimum) ที่สุด ผู้วิจัยจึงมุ่งเน้นศึกษาอัตราส่วนความยาวด้านที่กึ่งกลางของความยาวเอลิเมนต์เพื่อใช้เป็นผลลัพธ์ที่ใช้ทำการวิเคราะห์ผลของความเค้นและความเครียดเปรียบเทียบกับความเค้นและความเครียดของผลเฉลยใกล้ค่าแม่นตรง (Closed-to-Exact Solutions)

ผลลัพธ์ค่าการกระจายตัว Displacement Norms สำหรับคานยื่นปลายที่ได้รับการปรับปรุงให้มีรูเจาะจากรูปที่ 4.21 แสดงให้เห็นว่าบริเวณใกล้จุดรองรับยึดแน่น (Fixed Support) มีค่าเท่ากับ 0.2×10^{-6} และบริเวณปลายคานด้านไกลมีค่าเท่ากับ 1.8×10^{-6} เนื่องจากได้รับแรงเฉือนที่กระทำปลายคานด้านไกลทำให้บริเวณปลายคานยื่นเกิดการเคลื่อนที่บริเวณนั้นมีค่าการเคลื่อนที่มากที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูปจะเห็นได้ว่า ผลลัพธ์การเปลี่ยนตำแหน่งจุดรองรับยึดแน่นมีค่าเท่ากับ 0.2×10^{-6} และบริเวณปลายคานยื่นมีค่าเท่ากับ 1.8×10^{-6} ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับแบบจำลองที่ได้ทำการวิเคราะห์งานวิจัยในครั้งนี้ แสดงดังรูปที่ 4.22



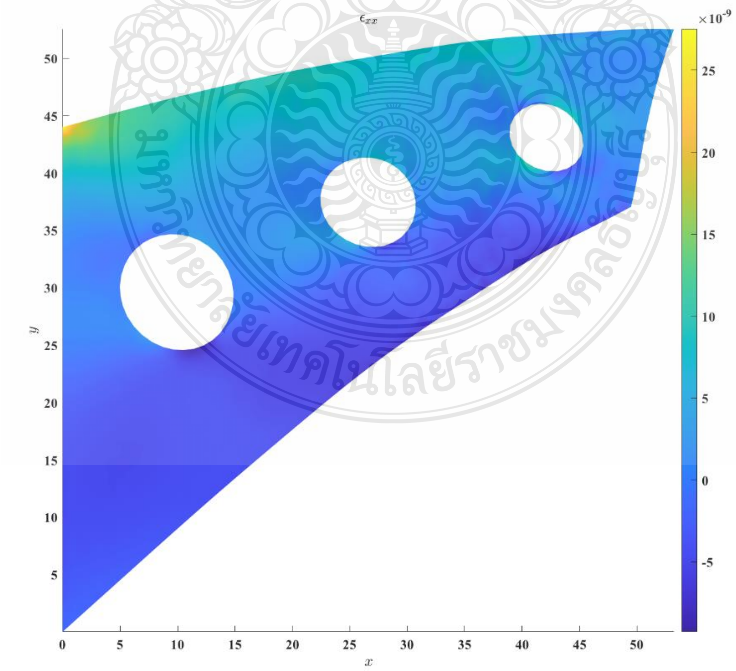
รูปที่ 4.21 ค่าการกระจายตัว Displacement Norms คานยื่นปลาย Cook Beam



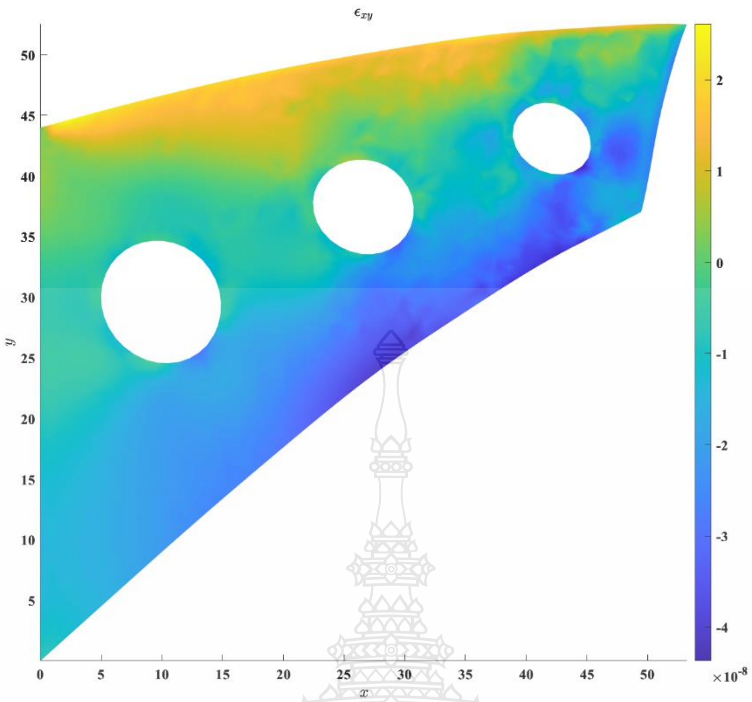
รูปที่ 4.22 ค่าการกระจายตัว Displacement Norms (Closed-to-Exact Solutions) คานยื่นปลาย Cook Beam

4.2 ความเครียด (Strains)

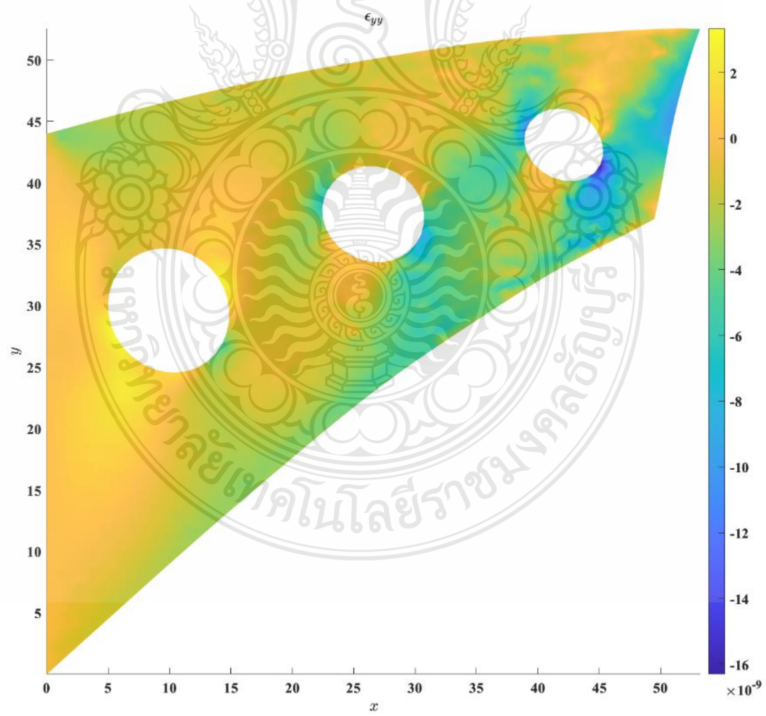
สำหรับผลลัพธ์ของความเครียด จะใช้ความเครียดที่ได้จากการวิเคราะห์บริเวณคานยื่นปลาย Cook Beam ที่ได้รับการปรับปรุงให้มีรูเจาะตลอดความลึกของคานที่มีการเพิ่มจำนวนโหนดที่อัตราส่วนความด้านเอลิเมนต์ที่กึ่งกลางของความยาวด้าน α (แอลฟา) เท่ากับ 0.5 เพื่อเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ทางโปรแกรมสำเร็จรูปไฟไนต์เอลิเมนต์ ในรูปทรงแบบจำลองของคานในลักษณะเดียวกัน ผลลัพธ์ที่ได้ทำการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมมีแนวโน้มเข้าใกล้กับค่าผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งผลการกระจายตัวของความเครียดตลอดทั่วทั้งคานยื่นปลายในรูปของ Contour Plot ได้จะถูกนำมาแสดงในรูปที่ 4.23 – 4.25 ความเครียดในทิศทางแกน X-X มีค่าความเครียดดึงสูงสุดเท่ากับ 25x10^{-9} บริเวณขอบล่างของคานยื่นปลาย มีค่าความเครียดอัดต่ำสุดเท่ากับ -10X10^{-9} บริเวณใกล้จุดรองรับยึดแน่นด้านบน ความเครียดในทิศทางแกน Y-Y มีค่าความเครียดดึงสูงสุดเท่ากับ 2X10^{-9} บริเวณใกล้เคียงกับจุดรองรับยึดแน่น มีค่าความเครียดอัดต่ำสุดเท่ากับ -10X10^{-9} บริเวณปลายคานยื่น ส่วนในทิศทางแกน X-Y มีค่าความเครียดดึงสูงสุดเท่ากับ 2X10^{-8} บริเวณขอบบนช่วงใกล้จุดรองรับยึดแน่นของคานยื่นปลาย มีค่าความเครียดอัดต่ำสุดเท่ากับ -4X10^{-8} บริเวณขอบล่างช่วงปลายคานยื่น และสามารถแสดงผลของความเครียด (Closed-to-Exact Solutions) ที่ทำการวิเคราะห์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูป แสดงดังรูปที่ 4.26 - 4.28



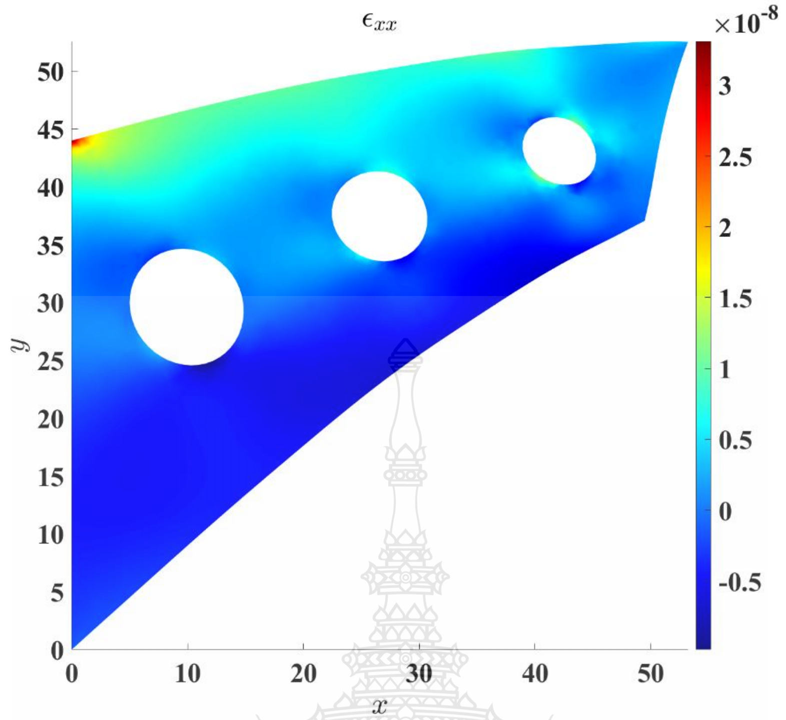
รูปที่ 4.23 ความเครียดบริเวณตำแหน่งของคานยื่นปลายทิศทางแกน X-X



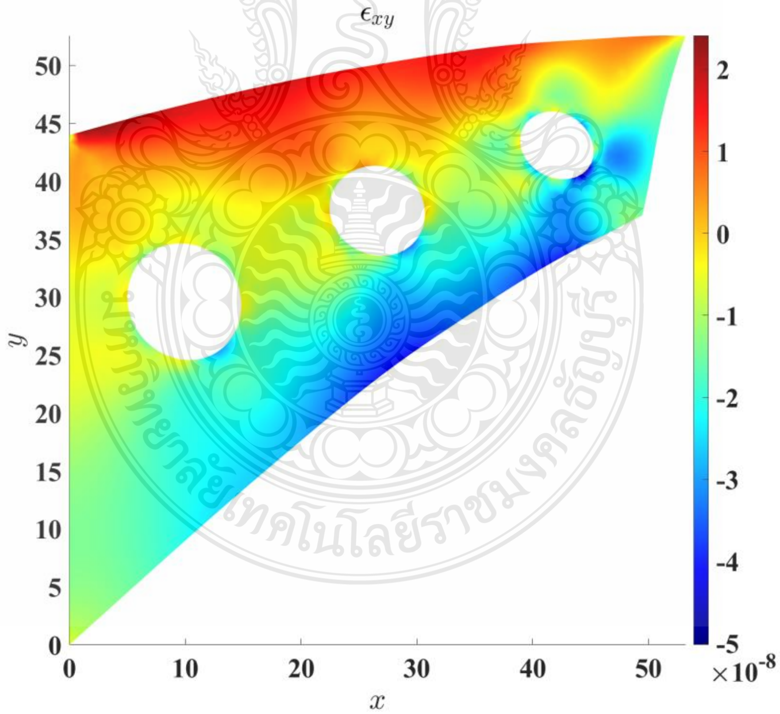
รูปที่ 4.24 ความเครียดบริเวณตำแหน่งของคานยื่นปลายทิศทางแกน X-Y



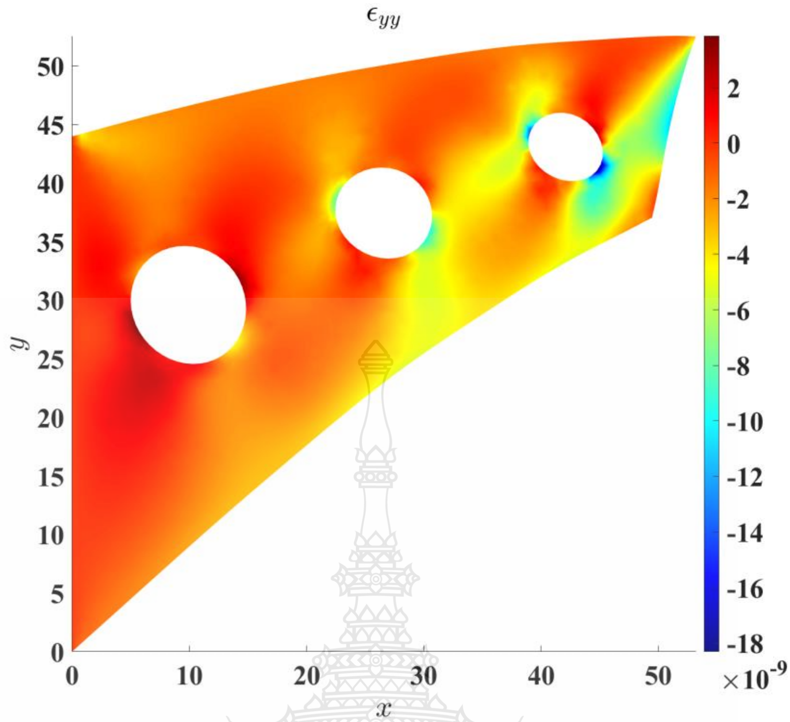
รูปที่ 4.25 ความเครียดบริเวณตำแหน่งของคานยื่นปลายทิศทางแกน Y-Y



รูปที่ 4.26 ความเครียดบริเวณตำแหน่งของคานยื่นปลายทิศทางแกน X-X (Closed-to-Exact Solutions)



รูปที่ 4.27 ความเครียดบริเวณตำแหน่งของคานยื่นปลายทิศทางแกน X-Y (Closed-to-Exact Solutions)

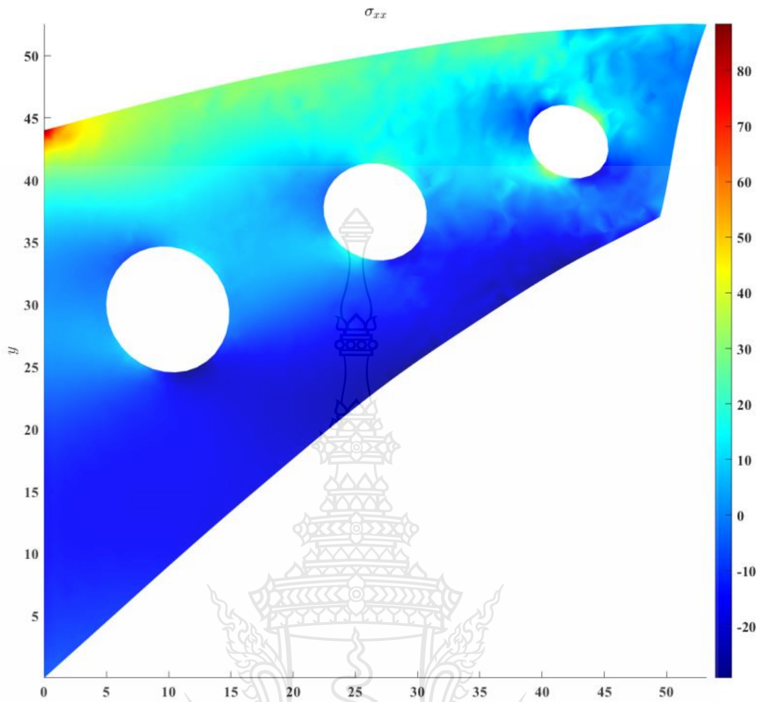


รูปที่ 4.28 ความเครียดบริเวณตำแหน่งของคานยื่นปลายทิศทางแกน Y-Y (Closed-to-Exact Solutions)

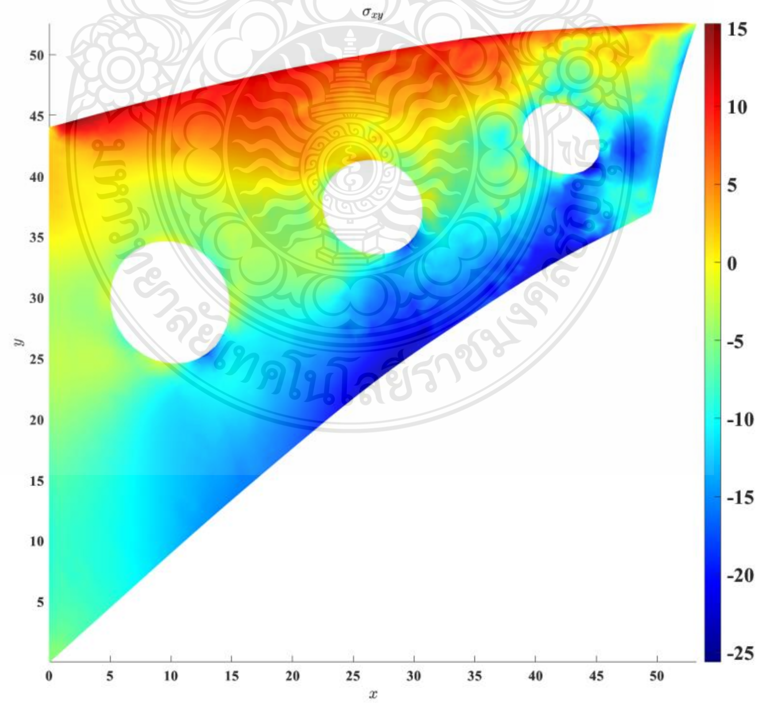
4.3 ความเค้น (Stresses)

สำหรับผลลัพธ์ของความเค้น จะใช้ความเค้นที่ได้จากการวิเคราะห์บริเวณคานยื่นปลาย Cook Beam ที่ได้รับการปรับปรุงให้มีรูเจาะตลอดความลึกของคานมีการเพิ่มจำนวนโหนดที่อัตราส่วนความด้านเอลิเมนต์ที่กึ่งกลางของความยาวด้าน α (แอลฟา) เท่ากับ 0.5 เทียบกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ทางโปรแกรมสำเร็จรูปไฟไนต์เอลิเมนต์ ในรูปทรงแบบจำลองของคานในลักษณะเดียวกัน ผลลัพธ์ที่ได้ทำการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมมีแนวโน้มเข้าใกล้กับค่าผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งผลการกระจายตัวของความเครียดปกติตลอดทั่วทั้งคานยื่นปลายในรูปของ Contour Plot ถูกนำมาแสดงในรูปที่ 4.29–4.31 ความเค้นในทิศทางแกน X-X มีค่าความเค้นดึงสูงสุดเท่ากับ 90 นิวตันต่อตารางเมตร บริเวณมุมขอบบนใกล้เคียงกับจุดรองรับยึดแน่นของคานยื่นปลาย มีค่าความเค้นอัดต่ำสุดเท่ากับ -30 นิวตันต่อตารางเมตร บริเวณขอบล่างของคานยื่นปลายและรอบๆ รูเจาะ ความเครียดในทิศทางแกน Y-Y มีค่าความเค้นดึงสูงสุดเท่ากับ 20 นิวตัวต่อตารางเมตร บริเวณมุมขอบบนใกล้เคียงกับจุดรองรับยึดแน่นของคานยื่นปลายและรอบๆ รูเจาะ มีค่าความเค้นอัดต่ำสุดเท่ากับ -50 นิวตันต่อตารางเมตร บริเวณรอบรูเจาะด้านปลายคานยื่น ส่วนในทิศทางแกน X-Y มีค่าความเค้นดึงสูงสุดเท่ากับ 15 นิวตันต่อตารางเมตร บริเวณขอบบนของคานยื่น มีค่าความเค้นอัดต่ำสุดเท่ากับ -25 นิวตันต่อตารางเมตร

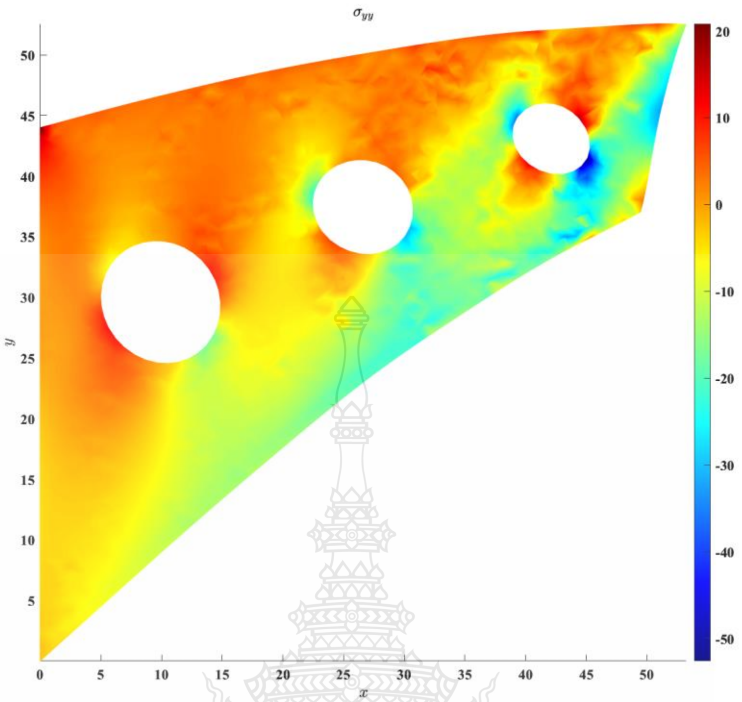
บริเวณขอบล่างของคานยื่น และสามารถแสดงผลของความเค้น (Closed-to-Exact Solutions) ที่ทำการวิเคราะห์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูป แสดงดังรูปที่ 4.32 - 4.34



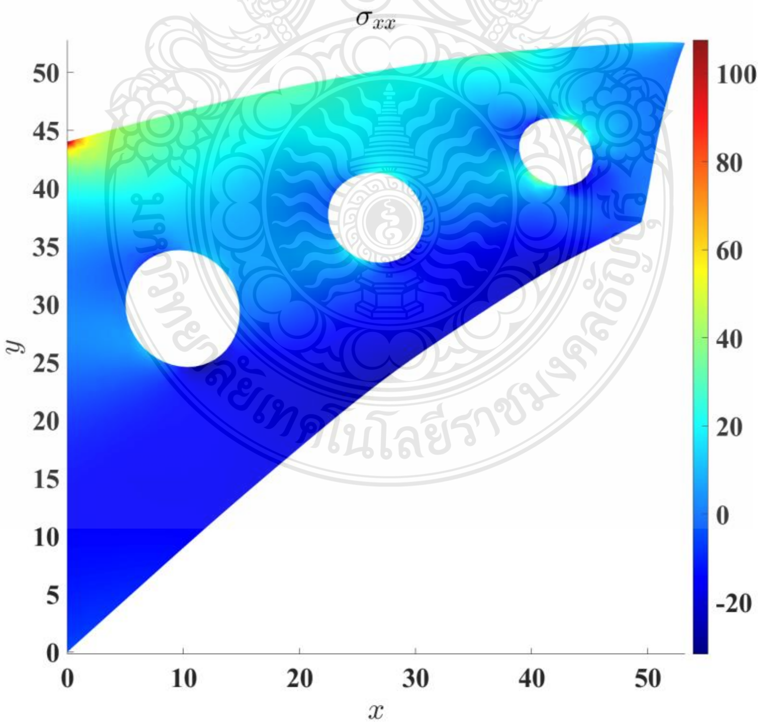
รูปที่ 4.29 ความเค้นบริเวณตำแหน่งของคานยื่นปลายทิศทางแกน X-X



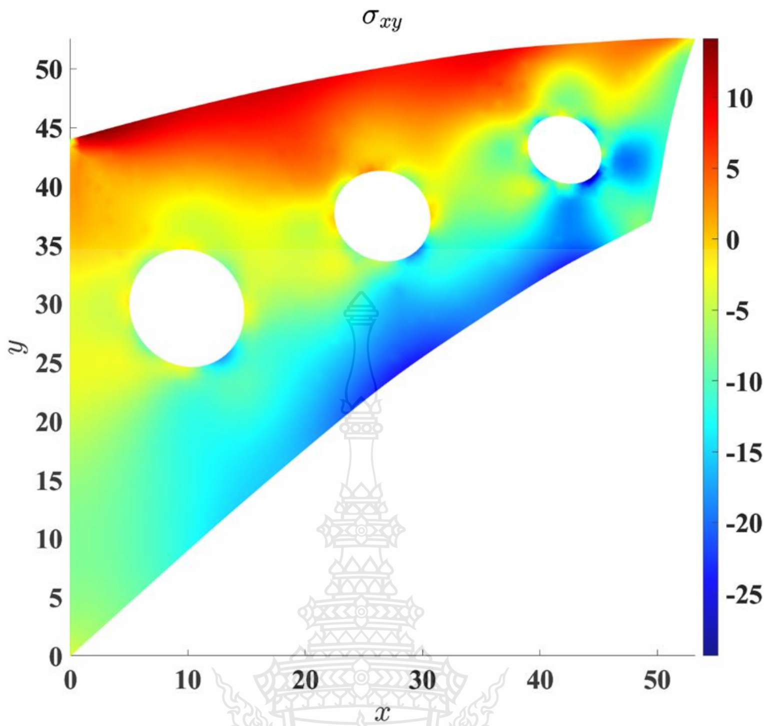
รูปที่ 4.30 ความเค้นบริเวณตำแหน่งของคานยื่นปลายทิศทางแกน X-Y



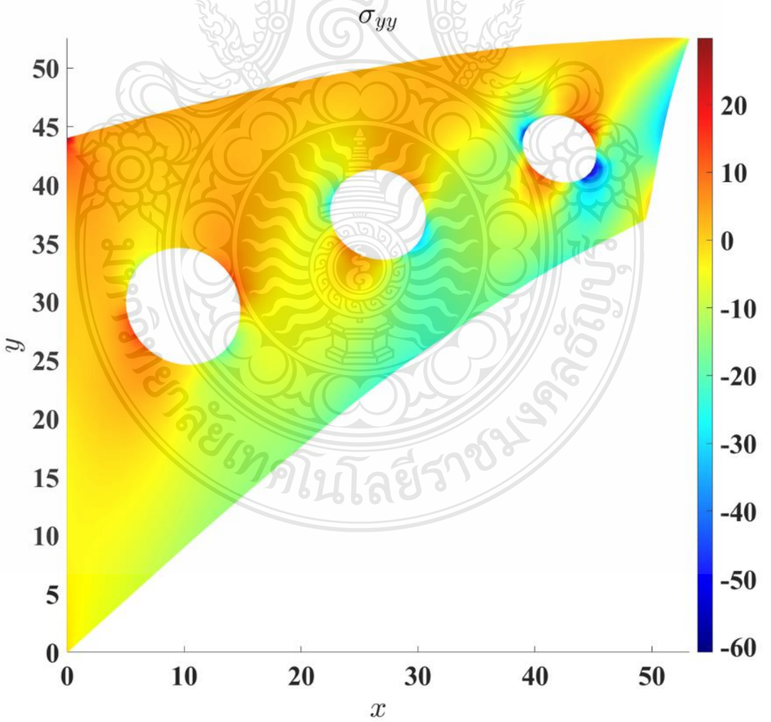
รูปที่ 4.31 ความเค้นบริเวณตำแหน่งของคานยื่นปลายทิศทางแกน Y-Y



รูปที่ 4.32 ความเค้นบริเวณตำแหน่งของคานยื่นปลายทิศทางแกน X-X (Closed-to-Exact Solutions)



รูปที่ 4.33 ความเค้นบริเวณตำแหน่งของคานยื่นปลายทิศทางแกน X-Y (Closed-to-Exact Solutions)

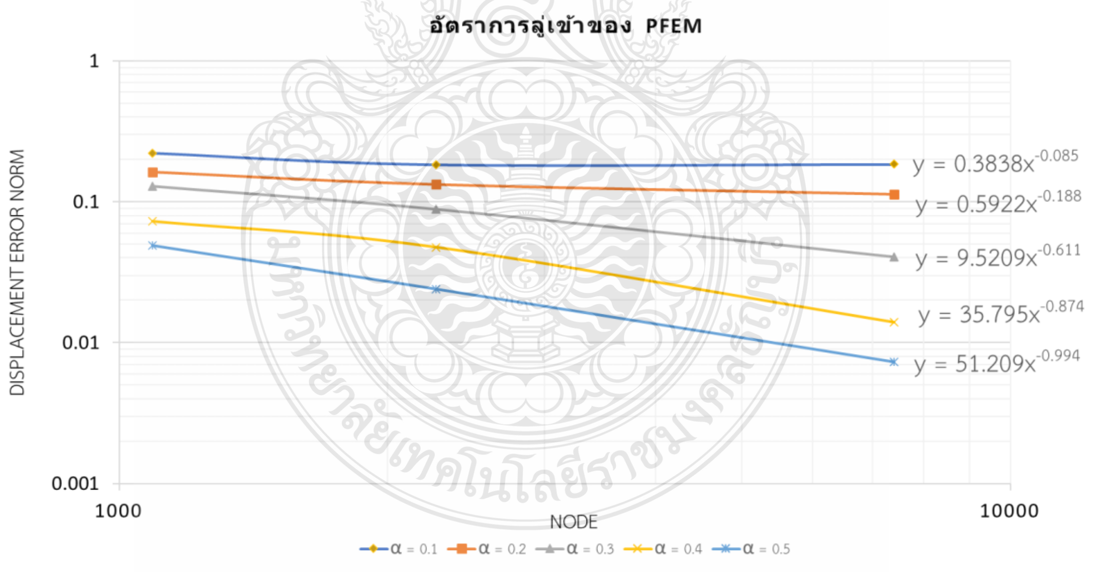


รูปที่ 4.34 ความเค้นบริเวณตำแหน่งของคานยื่นปลายทิศทางแกน Y-Y (Closed-to-Exact Solutions)

4.4 อัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นตรง (Close-to-Exact Solution)

เมื่อนำข้อมูลจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบเพิ่มจำนวนของโหนด (Node) ลงไปในแต่ละด้านของเอลิเมนต์แบบทรงเหลี่ยมสี่หน้า (Quadrilateral Element) หรือเอลิเมนต์รูปทรงหลายเหลี่ยม จากตารางที่ 4.2 มาทำการวาดกราฟเพื่อแสดงอัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นตรงสำหรับการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม โดยกำหนดให้แกนในแนวนอนแสดงจำนวนของโหนด ส่วนแกนในแนวดิ่งแสดงค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่ง ในรูปแบบ Log-Log scale นั้นพบว่า อัตราการลู่เข้ามีลักษณะใกล้เคียงเส้นตรง ความชันของกราฟที่อัตราส่วนความยาวด้าน α ตั้งแต่ 0.1 ถึง 0.5 มีค่าเท่ากับ -0.085, -0.188, -0.611, -0.874 และ -0.994 ตามลำดับ ความสัมพันธ์ดังกล่าว สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.35

เมื่อพิจารณาจากอัตราการลู่เข้าดังกล่าว พบว่า เมื่ออัตราส่วนความยาวด้าน α มีค่าเพิ่มขึ้น อัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นตรงของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมสำหรับการวิจัยในครั้งนี้ มีค่าเพิ่มขึ้นและเข้าใกล้ 1.0 เมื่อ อัตราส่วนความยาวด้าน α เป็น 0.5 ซึ่งเป็นค่าตามทฤษฎีของการวิเคราะห์เชิงตัวเลขทั่วไปนั่นเอง



รูปที่ 4.35 กราฟอัตราการลู่เข้าของ PFEM

บทที่ 5
สรุปผลการทดลองและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

การวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (PFEM) ที่ได้ทำการพิจารณาเพิ่มจำนวนของโหนด (Node) ลงไปในแต่ละด้านของเอลิเมนต์แบบทรงเหลี่ยมสี่หน้า (Quadrilateral Element) หรือเอลิเมนต์รูปทรงหลายเหลี่ยม เพื่อทำให้เอลิเมนต์นั้นกลายเป็นเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม สามารถสรุปผลงานวิจัยดังต่อไปนี้

5.1.1 การวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมอัตราส่วนความยาวด้าน (α) ที่แตกต่างกัน ซึ่งอัตราส่วนความยาวด้านอยู่ระหว่าง 0.1-0.5 ของความยาวเอลิเมนต์ และการแบ่งโครงตาข่าย (Mesh) ให้มีความละเอียด 3 กรณี พบว่า อัตราส่วนความสม่ำเสมอความยาวด้านของเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งในระนาบ 2 มิติ ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนั้น ส่งผลต่อความแม่นยำของการเปลี่ยนตำแหน่ง หรืออาจกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า การวิเคราะห์แบบไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบสองมิตินี้ มีความไว (Sensitive) ต่ออัตราส่วนความยาวด้าน (α)

5.1.2 ความเครียด (Strains) ผลลัพธ์ที่ได้ทำการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม ณ จุดที่กำหนดนั้น พบว่ามีแนวโน้มเข้าใกล้กับค่าผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นตรง ส่วนการกระจายตัวของความเครียดดังกล่าว มีลักษณะเหมือนกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปกติ

5.1.3 ความเค้น (Stresses) ผลลัพธ์ที่ได้ทำการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม พบว่า มีแนวโน้มเป็นไปในทิศทางเดียวกับค่าความเครียด รวมถึงการกระจายตัวของความเค้นก็สอดคล้องกับค่าจากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปกติ โดยสามารถสังเกตเห็นการเกิดความเค้นชุมนุม (Stress concentrations) ณ บริเวณรอบรูเจาะอย่างชัดเจน

5.1.4 อัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นตรง (Close-to-Exact Solution) พบว่า อัตราการลู่เข้า มีลักษณะใกล้เคียงเส้นตรง โดยมีแนวโน้มที่เพิ่มขึ้นและเข้าใกล้ค่าที่เหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติเชิงตัวเลข (Optimal = 1.0) เมื่อ α มีค่าเป็น 0.5 (ที่กึ่งกลางของความยาวด้านของเอลิเมนต์)

5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

5.2.1 ศึกษาผลความสม่ำเสมอของความยาวด้านเอลิเมนต์ของไฟไนต์เอลิเมนต์รูปชหลายเหลี่ยมต่อความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้สำหรับปัญหาที่แตกต่างกันออกไปเช่น ปัญหาความเค้น-ความเครียดในระนาบของโดเมนประเภทอื่น ๆ ที่เกิดความเค้นชุมนุม ได้แก่ L-shape หรือปัญหาเกี่ยวกับการแตกหัก เป็นต้น

5.2.2 ศึกษาการวิเคราะห์คานยื่นปลาย (Cook's Beam) ที่ปรับปรุงแล้วโดยประกอบขึ้นด้วยวัสดุแบบ FGM (Fuctional Garde Materials) โดยวิเคราะห์ทั้งแบบสถิตย์ศาสตร์และพลศาสตร์ควบคู่กันไป

5.2.3 ศึกษาการวิเคราะห์ปัญหาความเค้น-ความเครียดในระนาบสองมิติโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมร่วมกับวิธีอื่น ๆ (Coupling) เช่น วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีสเกลบาวเดอรี่ไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีเมสอิสระ เป็นต้น เพื่อขจัดความไวต่อการเปลี่ยนตำแหน่งของโหนดที่อยู่ตามด้านอันจะนำไปสู่การเพิ่มขึ้นของอัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นตรงในที่สุด

บรรณานุกรม

[1] Keates, M.O.a.S., *Finite Element Applications A Practical Guide to the FEM Process*. 2018.

[2] SCHMIDT, A.P.B.A.R.J., *ADVANCED MECHANICS OF MATERIALS.* 2003.

[3] HUTTON, D.V., *FUNDAMENTALS OF FINITE ELEMENT ANALYSIS*. 2004.

[4] Bi, Z., *Finite Element Analysis Applications A Systematic and Practical Approach*. 2018.

[5] Felippa, C.A., *INTRODUCTION to FINITE ELEMENT METHODS*. 2004.

[6] Wachspress, E.L., *A Rational Finite Element Basis*. 1975: Academic Press.

[7] Martin, R., *Skeletal Tissue Mechanics. Springer.* (No Title), 1998.

[8] Peters, J.F. and E. Heymsfield, *Application of the 2-D constant strain assumption to FEM elements consisting of an arbitrary number of nodes.* International journal of solids and structures, 2003. 40(1): p. 143-159.

[9] Ghosh, S. and S. Moorthy, *Elastic-plastic analysis of arbitrary heterogeneous materials with the Voronoi Cell finite element method.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995. 121(1-4): p. 373-409.

[10] Moorthy, S. and S. Ghosh, *Adaptivity and convergence in the Voronoi cell finite element model for analyzing heterogeneous materials.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000. 185(1): p. 37-74.

[11] Zhang, G. and R. Guo, *Interfacial cracks analysis of functionally graded materials using Voronoi cell finite element method.* Procedia Engineering, 2012. 31: p. 1125-1130.

[12] Wang, Z. and P. Li, *Voronoi cell finite element modelling of the intergranular fracture mechanism in polycrystalline alumina.* Ceramics International, 2017. 43(9): p. 6967-6975.

[13] Sukumar, N. and A. Tabarraei, *Conforming polygonal finite elements.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004. 61(12): p. 2045-2066.

บรรณานุกรม (ต่อ)

[14] Floater, M.S. and M.-J. Lai, *Polygonal spline spaces and the numerical solution of the Poisson equation.* SIAM Journal on Numerical Analysis, 2016. 54(2): p. 797-824.

[15] Floater, M.S., *Generalized barycentric coordinates and applications.* Acta Numerica, 2015. 24: p. 161-214.

[16] Floater, M., A. Gillette, and N. Sukumar, *Gradient bounds for Wachspress coordinates on polytopes.* SIAM Journal on Numerical Analysis, 2014. 52(1): p. 515-532.

[17] Rand, A., A. Gillette, and C. Bajaj, *Interpolation error estimates for mean value coordinates over convex polygons.* Advances in computational mathematics, 2013. 39: p. 327-347.

[18] Joshi, P., et al., *Harmonic coordinates for character articulation.* ACM transactions on graphics (TOG), 2007. 26(3): p. 71-es.

[19] Sukumar, N. and E. Malsch, *Recent advances in the construction of polygonal finite element interpolants.* Archives of Computational Methods in Engineering, 2006. 13: p. 129-163.

[20] Martin, S., et al. *Polyhedral finite elements using harmonic basis functions*. in *Computer graphics forum*. 2008. Wiley Online Library.

[21] Bishop, J.E., *A displacement-based finite element formulation for general polyhedra using harmonic shape functions.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2014. 97(1): p. 1-31.

[22] Kraus, M., A. Rajagopal, and P. Steinmann, *Investigations on the polygonal finite element method: Constrained adaptive Delaunay tessellation and conformal interpolants.* Computers & Structures, 2013. 120: p. 33-46.

[23] Manzini, G., A. Russo, and N. Sukumar, *New perspectives on polygonal and polyhedral finite element methods.* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2014. 24(08): p. 1665-1699.

บรรณานุกรม (ต่อ)

[24] Nguyen, N.V., et al., *A polygonal finite element method for laminated composite plates.* International Journal of Mechanical Sciences, 2017. 133: p. 863-882.

[25] Chau, K.N., et al., *A polytree-based adaptive polygonal finite element method for multi-material topology optimization.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018. 332: p. 712-739.

[26] Nguyen-Xuan, H., *A polygonal finite element method for plate analysis.* Computers & Structures, 2017. 188: p. 45-62.

[27] Zhang, H., S. Han, and L. Fan, *Modeling 2D transient heat conduction problems by the numerical manifold method on Wachspress polygonal elements.* Applied Mathematical Modelling, 2017. 48: p. 607-620.

[28] Li, X.-Y. and S.-M. Hu, *Poisson coordinates.* IEEE Transactions on visualization and computer graphics, 2012. 19(2): p. 344-352.

[29] Persson, P.-O. and G. Strang, *A simple mesh generator in MATLAB.* SIAM review, 2004. 46(2): p. 329-345.

[30] Talischi, C., et al., *PolyMesher: a general-purpose mesh generator for polygonal elements written in Matlab.* Structural and Multidisciplinary Optimization, 2012. 45: p. 309-328.

[31] Talischi, C., et al., *PolyTop: a Matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes.* Structural and Multidisciplinary Optimization, 2012. 45: p. 329-357.

[32] Quey, R. and M. Kasemer. *The neper/fepx project: free/open-source polycrystal generation, deformation simulation, and post-processing*. in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2022. IOP Publishing.

[33] Timoshenko, S. and J. Goodier, *Theory of Elasticity" McGraw-Hill Book Company.* Inc. New York, 1951.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นายธนชาติ ศรีเพ็ง
วัน เดือน ปีเกิด	9 พฤษภาคม 2540
	119/13 หมู่ที่ 1 ซอยบางศรีเมือง 8 ตำบลบางศรีเมือง อำเภอเมืองนนทบุรี จังหวัดนนทบุรี 11000
การศึกษา	ปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
ประสบการณ์การทำงาน	วิศวกรโยธาปฏิบัติการ ส่วนสำรวจและออกแบบ สำนักงานทางหลวงที่ 11 (ลพบุรี) กรมทางหลวง
เบอร์โทรศัพท์	095-953-8707
อีเมล์	tanachat_s@mail.rmutt.ac.th