

การวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์
รูปหลายเหลี่ยมแบบแบ่งเซลล์ย่อยไม่ต่อเนื่อง

DISCRETE SUBCELL POLYGONAL SMOOTHED FINITE ELEMENT
FOR 2D PLANE STRESS ANALYSIS



ธนพร แก้วใจรักษ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2566
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

การวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์
เอลิเมนต์หลายเหลี่ยมแบบแบ่งเซลล์ย่อยไม่ต่อเนื่อง

ธนพร แก้วใจรักษ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2566
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์
รูปหลายเหลี่ยมแบบแบ่งเซลล์ย่อยไม่ต่อเนื่อง
Discrete Subcell Polygonal Smoothed Finite Element for 2D Plane
Stress Analysis

ชื่อ - นามสกุล

นางสาวธนพร แก้วใจรักษ์

สาขาวิชา

วิศวกรรมโยธา

อาจารย์ที่ปรึกษา

รองศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.

ปีการศึกษา

2566

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์


..... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.)


..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ชัยณรงค์ อธิสกุล, ปร.ด.)


..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ศุภลลิตี พงศ์ศิวะสถิตย์, Ph.D.)


..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.)

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี อนุมัติวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็น
ส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต


..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์สรพงษ์ ภาสุปรีย์, Ph.D.)
วันที่ 20 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2567

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์ เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบแบ่งเซลล์ย่อยไม่ต่อเนื่อง
ชื่อ-นามสกุล	นางสาวธนพร แก้วใจรักษ์
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.
ปีการศึกษา	2566

บทคัดย่อ

ปัจจุบันปัญหาทางวิศวกรรมนั้นมีความซับซ้อนมากขึ้น การแก้ไขปัญหาทางวิศวกรรมจึงจำเป็นต้องใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขมาช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาเหล่านี้ โดยงานวิจัยนี้ทำการศึกษาวิเคราะห์ปัญหาการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน และอัตราการลู่เข้าด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (n -Sided Smoothed Finite Element Methods) แบบสร้างเอลิเมนต์ย่อยสุ่มแบบสุ่ม (Random) ภายในเอลิเมนต์หลัก

ปัญหาทดสอบสำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ เน้นไปที่การหาค่าเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งที่ปลายคาน ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน ค่าความเค้นและความเครียดของคานเซลล์ูลาร์ยื่นปลาย (Cantilever Cellular Beam) ในระนาบสองมิติ รับแรงเฉือนแบบพาราโบลา (Parabolic Shear) กระทำบนด้านของปลายคานด้านไกล

ผลลัพธ์ที่ได้นั้นพบว่า ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งและค่าความคลาดเคลื่อนที่ปลายคาน เมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำ (Close-to-exact solutions) นั้น ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ นอกจากนี้ ค่าความเครียด (Strains) และค่าความเค้น (Stresses) จากการวิเคราะห์ มีแนวโน้มลู่เข้าเมื่อจำนวนโครงตาข่ายเพิ่มขึ้น สอดคล้องและมีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกันกับค่าที่ใช้สำหรับอ้างอิง ในส่วนของอัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำ (Close-to-exact solutions) ความชันของกราฟที่ได้มีค่าเท่ากับ 1.241 สูงกว่าค่าสำหรับการวิเคราะห์ความเค้นในระนาบเชิงตัวเลขทั่วไปซึ่งมีค่าที่เหมาะสมเท่ากับ 1.0 ในขณะที่ใช้จำนวนเอลิเมนต์และโหนดน้อยกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปกติ

คำสำคัญ: สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม คานเซลล์ูลาร์ยื่นปลาย แรงเฉือนพาราโบลา เอลิเมนต์ย่อยสุ่มแบบสุ่ม

Thesis Title	Discrete Subcell Polygonal Smoothed Finite Element For 2D Plane Stress Analysis
Name-Surname	Miss. Thanaporn Kaewjairuk
Program	Civil Engineering
Thesis Advisor	Associate Professor Kamtornkiat Musiket, Ph.D.
Academic Year	2023

ABSTRACT

Engineering problems nowadays are becoming increasingly complex, making it necessary to employ numerical analysis techniques to solve them. This research focuses on analyzing the displacement at the end of a beam, displacement error norms and convergence rate using the n-Sided Smoothed Finite Element Method (nSFEM) with randomly generated subcells within the main element.

The benchmark problem for this research aims to determine the vertical displacement at the end of a beam, displacement error norms, and the stresses and strains of a two-dimensional cantilever cellular beam subjected to a parabolic shear traction at the far-ended edge of a beam.

The results show that there are no significant differences between the displacement and error norm at the end of the beam when compared to the close-to-exact solutions. In addition, the strains and stresses from the analysis tend to converge as the number of meshes increases and are consistent with the reference values. In terms of the convergence rate to the close-to-exact solutions, the slope obtained from plotting is 1.24, which is higher than the optimal value of 1.0 for plane stress numerical analysis, while using fewer elements and nodes than the standard finite element method.

Keywords: n-sided smoothed finite element method, cantilever cellular beam, parabolic shear traction, randomly generated subcells

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์ได้ด้วยความกรุณา และความอนุเคราะห์ของ รองศาสตราจารย์ ดร.กำธรเกียรติ์ มุสิกเทศ อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ที่ได้กรุณาเสียสละเวลาให้คำปรึกษา คำแนะนำ และให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ตลอดจนติดตามความก้าวหน้า ในการทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้อย่างใกล้ชิดจนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้ทำการศึกษาวิจัยขอกราบ ขอบพระคุณอย่างสูงมา ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย ฝั่งไผ่งาม ประธานกรรมการสอบและ กรรมการสอบ รองศาสตราจารย์ ดร.ศุภสิทธิ์ พงศ์ศิระสถิตย์ ที่ได้ให้ความกรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไข ข้อบกพร่องของงานวิจัยรวมทั้งเสียสละเวลามาเป็นคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ชัยณรงค์ อธิสกุล กรรมการและผู้ทรงคุณวุฒิจากภายนอก จากคณะ วิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ที่ได้ให้ความกรุณาเสียสละเวลามา ร่วมเป็นคณะกรรมการในการสอบวิทยานิพนธ์ และให้คำแนะนำในด้านต่างๆ อันเป็นประโยชน์แก่งานวิจัยนี้

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณบิดา มารดา และบูรพาจารย์ทุกท่านที่ได้ที่ประสิทธิ์ประสาท ความรู้ให้กับนักวิจัย ตลอดจนทุกคนในครอบครัว บรรดาเพื่อน ๆ ที่คอยให้กำลังใจอย่างสม่ำเสมอ และ แฟนที่เป็นผู้ร่วมวิจัยและผู้สนับสนุนช่วยเหลือทุก ๆ ด้านในการจัดทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้ ผู้วิจัย หวังเป็นอย่างยิ่งว่าวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้สนใจศึกษางานวิจัยทางด้านนี้ และ หากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ขาดตกบกพร่องหรือไม่สมบูรณ์ประการใด ผู้วิจัยขอกราบขออภัยมา ณ โอกาสนี้ด้วย

ธนพร แก้วใจรักษ์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	(3)
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	(4)
กิตติกรรมประกาศ.....	(5)
สารบัญ.....	(6)
สารบัญตาราง.....	(7)
สารบัญรูป.....	(8)
บทที่ 1 บทนำ.....	10
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	10
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์.....	11
1.3 ขอบเขตของการศึกษา.....	11
1.4 ผลที่คาดว่าจะได้รับ.....	12
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	13
2.1 หลักพื้นฐานของกลศาสตร์ของแข็ง (Fundamental Solid Mechanics).....	13
2.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method).....	19
2.3 การวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม.....	23
2.4 ความแตกต่างระหว่างไฟไนต์เอลิเมนต์กับสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์.....	27
2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	29
บทที่ 3 วิธีการวิจัย.....	31
3.1 สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่มีการแบ่งเซลล์ย่อยภายใน เอลิเมนต์หลักแบบไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous Polygonal Cell-Base Smoothed Finite Element).....	31
3.2 ปัญหาสำหรับการทดสอบ.....	33
บทที่ 4 ผลการศึกษาวิเคราะห์.....	34
4.1 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคานและค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน.....	35
4.2 ความเครียด (Strains).....	38
4.3 ความเค้น (Stresses).....	41
4.4 อัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำ (Close-to-exact solution)..	44
บทที่ 5 สรุปผลการทดลองและข้อเสนอแนะ.....	45
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	45
5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต.....	46
บรรณานุกรม.....	47
ประวัติผู้เขียน.....	50

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 4.1 การโค้งตัว ณ จุด A และค่ามาตรฐานความคลาดเคลื่อน.....	34



สารบัญรูป

		หน้า
รูปที่ 2.1	ปัญหาการวิเคราะห์ความเค้นในระนาบ 2 มิติ.....	13
รูปที่ 2.2	ปัญหาการวิเคราะห์ความเครียดในระนาบ 2 มิติ.....	14
รูปที่ 2.3	ปัญหาการวิเคราะห์ความสมมาตรตามแนวแกน.....	14
รูปที่ 2.4	โมเดลทางกายภาพของของแข็งสำหรับ 3 มิติ.....	15
รูปที่ 2.5	องค์ประกอบของความเค้นในเอลิเมนต์ 3 มิติ.....	15
รูปที่ 2.6	สมมูลขององค์ประกอบของความเค้นในลูกบาศก์.....	17
รูปที่ 2.7	ขอบเขตล่างและบนกับเส้นรอบวงของวงกลม.....	19
รูปที่ 2.8	การแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย.....	20
รูปที่ 2.9	การแบ่งโดเมนแบบต่าง ๆ	23
รูปที่ 2.10	สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม.....	24
รูปที่ 2.11	การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมออกเป็นโดเมนย่อยสม่ำเสมอรูปสามเหลี่ยม..	24
รูปที่ 2.12	การแบ่งเอลิเมนต์ย่อยรูปสี่เหลี่ยมภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม.....	25
รูปที่ 2.13	การหาค่าฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์ย่อยรูปสี่เหลี่ยมภายในเอลิเมนต์หลายเหลี่ยม..	26
รูปที่ 2.14	ความแตกต่างของขั้นตอนการสร้างความเครียดทั้ง 2 วิธี.....	28
รูปที่ 3.15	การสร้างเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม.....	32
รูปที่ 3.16	กเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอรูปทรงสี่หน้า.....	32
รูปที่ 3.17	สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบแบ่งเซลล์ย่อยภายใน เอลิเมนต์หลักแบบไม่ต่อเนื่อง.....	33
รูปที่ 3.18	คานยื่นปลาย (Cantilever Beam) รับแรงเฉือนปลายคาน.....	33
รูปที่ 4.19	เอลิเมนต์ที่ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยรูปหลายเหลี่ยมที่ความละเอียดน้อย..	34
รูปที่ 4.20	เอลิเมนต์ที่ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยรูปหลายเหลี่ยมที่ความละเอียดปานกลาง	34
รูปที่ 4.21	เอลิเมนต์ที่ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยรูปหลายเหลี่ยมที่ความละเอียดมาก.....	34
รูปที่ 4.22	เอลิเมนต์ที่ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย (แสดงสี) และไม่ถูกแบ่ง (ไม่แสดงสี)..	35
รูปที่ 4.23	แสดงค่าการโก่งตัวที่จุด A ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายใน ของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่องตลอดทั่วทั้งโดเมนของปัญหา เปรียบเทียบ กับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	36
รูปที่ 4.24	การโก่งตัวของโหนดด้านบนตลอดความยาวคาน (จำนวนเอลิเมนต์ 3927 จำนวนโหนด 8628).....	37
รูปที่ 4.25	แสดงค่าการกระจายตัวของ Displacement Norm (not Displacement error Norm).....	37
รูปที่ 4.26	การกระจายตัวค่าความเครียดของคานเซลล์ูลาร์ (ϵ_{xx}) ด้วยวิธี สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง.....	38

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 4.27	การกระจายตัวค่าความเครียด (ϵ_{xx}) ของคานเซลลูลาร์ จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมAnsys Student Version.....	39
รูปที่ 4.28	การกระจายตัวค่าความเครียดของคานเซลลูลาร์ (ϵ_{xy}) ด้วยวิธี สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง.....	39
รูปที่ 4.29	การกระจายตัวค่าความเครียด (ϵ_{xy}) ของคานเซลลูลาร์ จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมAnsys Student Version.....	39
รูปที่ 4.30	การกระจายตัวค่าความเครียดของคานเซลลูลาร์ (ϵ_{yy}) ด้วยวิธี สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง.....	40
รูปที่ 4.31	การกระจายตัวค่าความเครียด (ϵ_{yy}) ของคานเซลลูลาร์ จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมAnsys Student Version.....	40
รูปที่ 4.32	การกระจายตัวค่าความเค้นของคานเซลลูลาร์ (σ_{xx}) ด้วยวิธี สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง.....	41
รูปที่ 4.33	การกระจายตัวค่าความเค้น (σ_{xx}) ของคานเซลลูลาร์ จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมAnsys Student Version.....	42
รูปที่ 4.34	การกระจายตัวค่าความเค้นของคานเซลลูลาร์ (σ_{xy}) ด้วยวิธี สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง.....	42
รูปที่ 4.35	การกระจายตัวค่าความเค้น (σ_{xy}) ของคานเซลลูลาร์ จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมAnsys Student Version.....	42
รูปที่ 4.36	การกระจายตัวค่าความเค้นของคานเซลลูลาร์ (σ_{yy}) ด้วยวิธี สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง.....	43
รูปที่ 4.37	การกระจายตัวค่าความเค้น (σ_{yy}) ของคานเซลลูลาร์ จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมAnsys Student Version.....	43
รูปที่ 4.38	อัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง.....	44

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัจจุบันปัญหาทางวิศวกรรมในนั้นมีความสลับซับซ้อนมากขึ้นตามวิวัฒนาการของการออกแบบ ที่ต้องตอบสนองฟังก์ชันการใช้งานที่หลากหลาย ทำให้การวิเคราะห์พฤติกรรมโครงสร้างตามหลักการคำนวณทั่วไป อาจไม่สามารถทำได้ หรือให้ผลที่ไม่ใกล้เคียงตามพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจริง การแก้ไขปัญหาทางวิศวกรรมในลักษณะนี้ จึงจำเป็นต้องใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขมาช่วยในการวิเคราะห์แก้ไขปัญหาโครงสร้าง ซึ่งโดยทั่วไปปัญหาทางวิศวกรรมจะสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ทราบค่า (Unknown Variables) กับสิ่งที่ทราบค่า (Constraints) ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations) ในลำดับต่างๆ แต่บ่อยครั้งพบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกิดขึ้น ไม่สามารถใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่แก้ไขปัญหาเพื่อหาผลเฉลยที่แม่นยำตรงได้

ในอดีตที่ผ่านมาวิธีการเชิงตัวเลขได้ถูกคิดค้นขึ้นมามากมาย ซึ่งวิธีที่ใช้กันอย่างแพร่หลายและเป็นที่ยอมรับในระดับสากลจนมาถึงปัจจุบัน คือ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element) ซึ่งสามารถแก้ไขปัญหาวิศกรรมที่มีข้อมูลเชิงตัวเลขที่มีความสลับซับซ้อน ซึ่งต้องใช้องค์ความรู้ประกอบหลายด้าน เช่น ความรู้ด้านกลศาสตร์วัสดุ ความรู้ด้านการคำนวณเชิงตัวเลข เป็นต้น โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element) มีหลักการที่สำคัญคือการแบ่งโครงสร้างเป็นรูปเรขาคณิตอย่างง่าย เป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ เนื่องจากสามารถคำนวณหาค่าตอบที่แน่แท้ของชิ้นส่วนที่มีรูปทรงเรขาคณิตได้ เมื่อรวมชิ้นส่วนย่อย ๆ เป็นชิ้นส่วนโครงสร้างขนาดใหญ่ ก็จะสามารถแก้ไขปัญหาคำนวณเชิงตัวเลขในส่วนสมการเชิงอนุพันธ์ ปัญหาโจทย์และเงื่อนไขขอบ แต่ก็ยังมีข้อจำกัดที่ยังต้องได้รับการพัฒนา นักวิจัยหลายกลุ่มได้ทำการคิดค้นวิธีการใหม่ๆ อย่างต่อเนื่อง อย่างเช่น วิธีไม่ใช้โครงตาข่าย (Meshless Method) วิธีการแบ่งออกเป็นหนึ่ง (Partition of Unity) วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยม (Polygonal Finite Element Method) วิธีสเกลบาร์เดอร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ (Scaled Boundary Finite Element Method, SBFEM) และวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (Smoothed finite element methods, SFEM) เป็นต้น ข้อดีหลักอย่างหนึ่งของ SFEMs ที่เหนือกว่าวิธีเชิงตัวเลขอื่น ๆ คือการไม่ต้องทำการ Mapping ระหว่าง Physical และ Parents Element นั้นเอง ทำให้โดยรวมแล้ว SFEM เป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสำหรับการแก้ไขปัญหสมการเชิงอนุพันธ์ และมีการใช้กันอย่างแพร่หลายทั้งในด้านวิชาการ ด้านอุตสาหกรรม และด้านวิศวกรรม

งานวิจัยนี้ได้ทำการวิเคราะห์ศึกษาปัญหาความเค้นหรือความเครียดด้วยการใช้สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (n-Sided Smoothed finite element methods) แบบสร้างเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมที่ทำการแบ่งเอลิเมนต์ย่อยภายในแบบสุ่ม (Random) ที่ใช้ในการตรวจสอบประสิทธิภาพของงานวิจัยนี้ คือปัญหาความเค้นในระนาบของคานยื่นปลาย (Cantilever Cellular Beam) รับแรงเฉือนซึ่งมีการกระจายตัวแบบพาราโบลา (Parabolic Shear) กระทำที่ปลายคานด้านไกล

การจัดเรียงเนื้อหาของวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้ ประกอบไปด้วย บทที่ 1 บทนำ ความมุ่งหมาย และวัตถุประสงค์ ขอบเขตของการศึกษาและผลที่คาดว่าจะได้รับ บทที่ 2 กล่าวถึง ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง บทที่ 3 กล่าวถึงวิธีการศึกษาและดำเนินงานวิจัย ผลการศึกษาและสรุปผลและข้อเสนอแนะ จะถูกกล่าวถึงในบทที่ 4 และ 5 ตามลำดับต่อไป

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อศึกษาทฤษฎีการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นหรือความเครียดในระนาบสองมิติด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทรงเหลี่ยมหลายหน้า (n-Sided Polygonal Smoothed Finite Element) ซึ่งใช้การสร้างโดเมนย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลัก (Cell-based smoothing domain)

1.2.2 เพื่อพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมหลายหน้าที่ใช้การสร้างโดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์หลักสำหรับปัญหาความเค้นหรือความเครียดในระนาบสองมิติ

1.2.3 เพื่อเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) ของปัญหาทดสอบ (Benchmark problems) กับเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับอัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำตรง (Convergence Rate)

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

1.3.1 วิเคราะห์ปัญหาความเค้นหรือความเครียดในระนาบสองมิติด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมหลายหน้า (n-Sided Polygonal Finite Element) ซึ่งใช้การสร้างโดเมนย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักที่เลือก (Cell-Based Smoothing Domain) สลับกับเอลิเมนต์หลักซึ่งแบ่งเอลิเมนต์ย่อยภายในแบบสุ่ม (Random)

1.3.2 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (In-house code) ด้วยโปรแกรม GNU Octave สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นหรือความเครียดในระนาบสองมิติด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมหลายหน้าซึ่งใช้การสร้างโดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์หลักแบบสลับเอลิเมนต์

1.3.3 วิเคราะห์ปัญหาทดสอบ (Benchmark problems) เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Ansys Student Version สำหรับความเค้นในระนาบของคานยื่นปลายรับแรงเฉือนกระจายตัวแบบพาราโบลากระทำที่ปลายคานด้านไกล

1.4 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 เข้าใจทฤษฎีของการวิเคราะห์สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทรงเหลี่ยมหลายหน้าโดยการสร้างโดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์หลักแบบสลับเอลิเมนต์

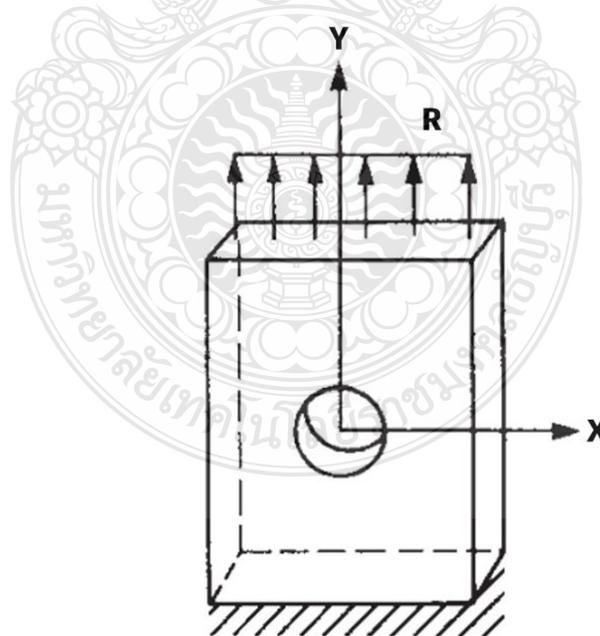
1.4.2 ต้นแบบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับวิเคราะห์ปัญหาความเค้นหรือความเครียดในระนาบสองมิติ ซึ่งสามารถพัฒนาต่อไปสำหรับปัญหาทางวิศวกรรมอื่น ๆ ได้แก่ ปัญหาการวิเคราะห์ทางพลศาสตร์ (Dynamics) ปัญหาการถ่ายเทความร้อน (Heat transfer) ปัญหาการแตกหัก (Fracture) เป็นต้น รวมทั้งปัญหาทางวิศวกรรมที่เกี่ยวข้องอื่น ๆ ในสามมิติ



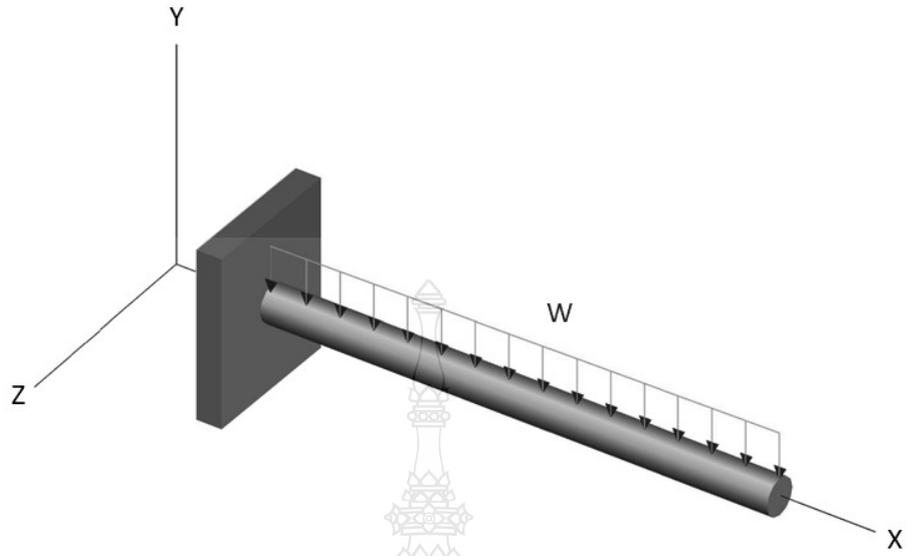
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 หลักพื้นฐานของกลศาสตร์ของแข็ง (Fundamental Solid Mechanics)

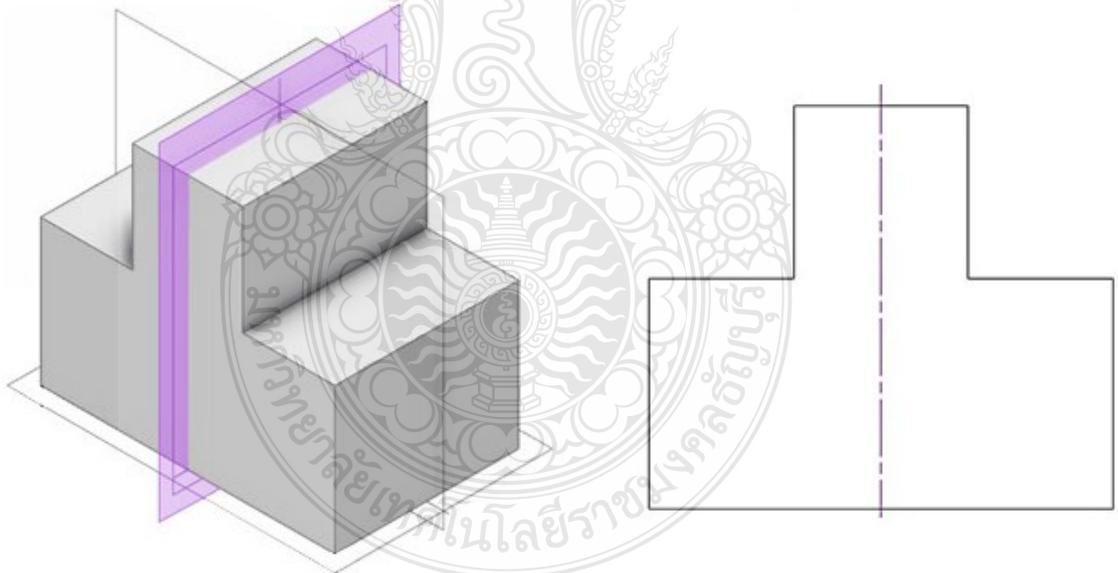
2.1.1 วัตถุจะอยู่ในสภาวะความสมดุลได้นั้น วัตถุดังกล่าวจะต้องมีความสมดุลของแรง (Balance of Force) เพื่อป้องกันการเคลื่อนที่ของวัตถุอย่างมีความเร่ง (Acceleration) และจะต้องมีความสมดุลของโมเมนต์ (Balance of Moment) รอบจุดใดๆ เพื่อป้องกันการหมุนของวัตถุรอบจุดดังกล่าวอย่างมีความเร่ง ดังนั้น สมการอีลาสติก (Elasticity Equations) ของปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมโดยทั่วไปแล้วมักจะแสดงในรูปของการเคลื่อนที่ (Displacements) ความเค้น (Stresses) ความเครียด (Strains) เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) เงื่อนไขตอนเริ่มต้น (Initial Conditions) หรือสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับความเค้น (Constitutive Equations) โดยทั่วไปแล้วโครงสร้างทางด้านวิศวกรรมจะถูกออกแบบให้มีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่น (Elastic) ภายใต้การกระทำของแรงหรือน้ำหนักบรรทุกที่ใช้ในการออกแบบ ซึ่งในช่วงนี้วัสดุจะยังคงมีความแกร่ง (Stiffness) ถ้าค่าความเครียดที่เกิดขึ้นภายในวัตถุนั้น มีค่าน้อยมาก (Small Strain) เรามักไม่นำมาคิด ปัญหาใน 2 มิติ นั้น แท้จริงแล้วก็เป็นการจำลองโมเดลมาจากระบบ 3 มิติ เพื่อความสะดวกในการหาค่าต่าง ๆ นั้นเอง โดยทั่วไป สามารถจำแนกออกได้เป็น 3 ประเภท คือ ปัญหาความเค้นในระนาบ (Plane Stress) ความเครียดในระนาบ (Plane Strain) และปัญหาความสมมาตรตามแนวแกน (Axisymmetric) ตามรูปที่ 2.1, 2.2, และ 2.3 ตามลำดับ



รูปที่ 2.1 ปัญหาการวิเคราะห์ความเค้นในระนาบ 2 มิติ

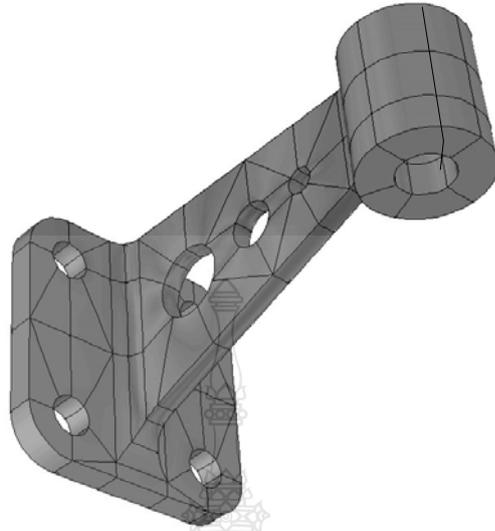


รูปที่ 2.2 ปัญหาการวิเคราะห์ความเครียดในระนาบ 2 มิติ

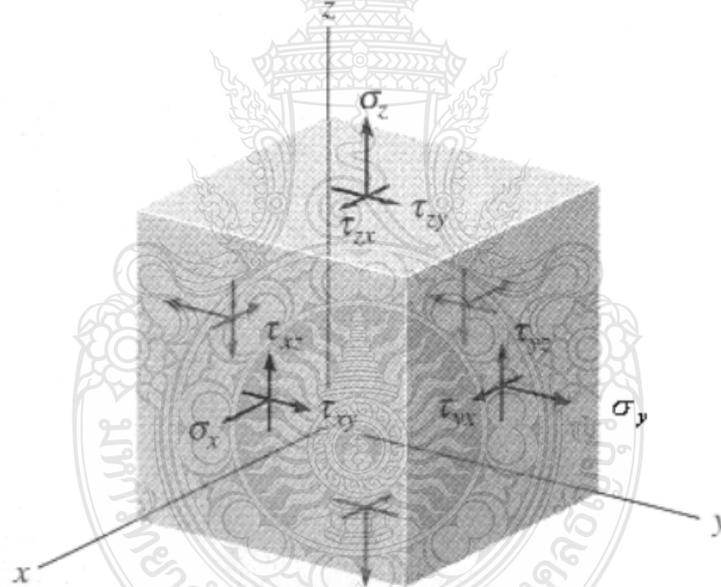


รูปที่ 2.3 ปัญหาการวิเคราะห์ความสมมาตรตามแนวแกน

2.1.1.1 สมการอีลาสติคสำหรับของแข็งใน 3 มิติ



รูปที่ 2.4 โมเดลทางกายภาพของของแข็งสำหรับ 3 มิติ



รูปที่ 2.5 องค์ประกอบของความเค้นในเอลิเมนต์ 3 มิติ [1]

หากทำการพิจารณาวัตถุทรงลูกบาศก์ขนาดเล็ก ซึ่งมีปริมาตร (V) เป็น dV ดังแสดงในรูปที่ 2.5 พบว่า ที่ด้านทั้งหกด้านของพื้นผิวซึ่งตั้งฉากกับแกนทั้งสามนั้น มีองค์ประกอบของความเค้นตั้งฉาก (Normal stress) และองค์ประกอบของความเค้นเฉือน (Shear stress) ตามแนวแกน x , y และ z ตามลำดับ ทิศทางของความเค้นที่ปรากฏในรูปนั้น จะถูกกำหนดให้มีเครื่องหมายเป็นบวกทั้งหมด องค์ประกอบของความเค้นและความเครียดทั้ง 6 ค่า ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้ ดังนี้

$$\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}\}^T \quad (2.1)$$

$$\epsilon = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\}^T \quad (2.2)$$

โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่งที่แกนทั้งสามแกน สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= 2\epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.3)$$

เมื่อให้ u , v และ w คือการเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทางแกน x , y และ z ตามลำดับ ในทางกลศาสตร์ นิยมเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่งโดยใช้เมทริกซ์โอเปอเรชันที่เรียกว่า Differential Operator, L , ซึ่งสามารถเปลี่ยนสมการที่ (2.3) ให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$\epsilon = LU, \quad U = \{u, v, w\}^T \quad (2.4)$$

เมื่อ U คือเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง และ L เป็นเมทริกซ์โอเปอเรชันแสดงได้ดังสมการที่ (2.5)

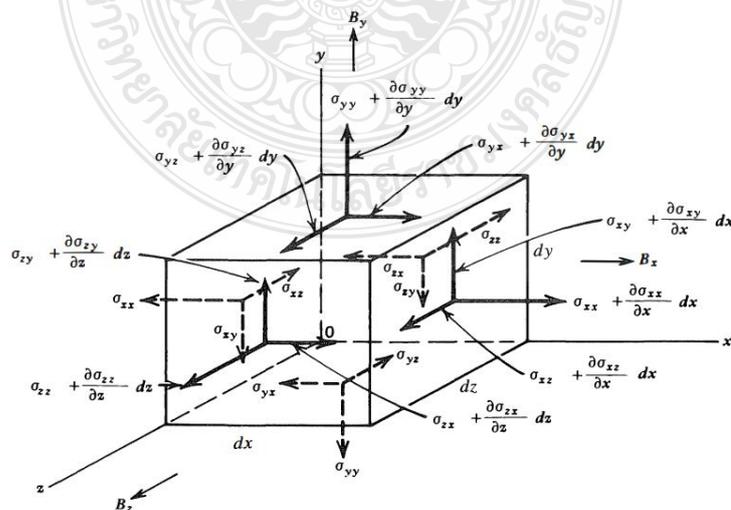
โดยสุดท้าย สมการที่ใช้อธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียด (Constitutive Equation) ของของแข็งที่มีพฤติกรรมในช่วงอีลาสติคแบบเชิงเส้น (Linear Elasticity) สามารถแสดงได้เป็นเมทริกซ์ ดังนี้

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.6)$$

2.1.2 สมการสมดุลพลวัต (Dynamics Equilibrium Equations)

สมการสมดุลพลวัตของของแข็งนั้นสามารถเขียนได้จากการพิจารณาถึงความสมดุลของเอลิเมนต์รูปทรงลูกบาศก์ดังในรูปที่ 2.6 ซึ่งหาได้จากการพิจารณารวมผลของแรงเฉื่อย (Inertia Forces) เนื่องจากการเคลื่อนที่ของวัตถุเข้าไปในรูปที่ 2.5 นั้นเอง เพราะฉะนั้น สมการสมดุลพลวัตในทิศทางแกน X สามารถเขียนได้จากการรวมผลรวมของแรงทั้งหมดและแสดงได้เป็น



รูปที่ 2.6 สมดุลขององค์ประกอบของความเค้นในลูกบาศก์

$$\begin{aligned}
& \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{xx} dydz \\
& + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dx \right) dx dz - \sigma_{yx} dx dz \\
& + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dx \right) dx dy - \sigma_{zx} dx dy \\
& + f_x dx dy dz = \rho \ddot{u} dx dy dz
\end{aligned} \tag{2.7}$$

โดยเทอมฝั่งขวามือของสมการ หมายถึงเทอมที่ได้มาจากแรงเฉื่อย \ddot{u} ในขณะที่เทอมฝั่งซ้าย ซึ่งมีตัวแปร f_x หมายถึง เทอมที่เกิดจากแรงกระทำภายนอกนั่นเอง สมการที่ (2.7) สามารถจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่ายจะได้เป็น

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_x = \rho \ddot{u} \tag{2.8}$$

ในรูปแบบเดียวกัน สมการความสมดุลพลวัตในทิศทางของแกน Y และ Z จะสามารถเขียนโดยการรวมแรงที่เกิดขึ้นทั้งหมดเข้าด้วยกัน นั่นคือ สมการต่อไปนี้

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_y = \rho \ddot{v} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho \ddot{w} \tag{2.10}$$

ซึ่งสมการสมดุลทั้ง 3 สมการดังกล่าวข้างต้น ทำการนำมาเขียนรวมกันให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ทั่วไปอย่างย่อได้เป็น

$$L^T \sigma + f_b = \rho \ddot{U} \tag{2.11}$$

หากทำการเปลี่ยนค่าของความเค้นในสมการที่ 2.11 ให้อยู่ในรูปของการเปลี่ยนตำแหน่งผ่านสมการที่ 2.4 - 2.6 แล้ว สมการที่ 2.11 จะเปลี่ยนรูปเป็น

$$L^T E L U + f_b = \rho \ddot{U} \tag{2.12}$$

สมการที่ (2.12) คือ การแสดงสมการรูปทั่วไปของสมการสมดุลพลวัต (Dynamics Equilibrium Equation) สำหรับของแข็งซึ่งสามารถใช้ได้กับทั้งปัญหาในสองมิติและสามมิติ สำหรับกรณีที่แรงภายนอกกระทำต่อของแข็งเป็นแรงประเภทสถิตยศาสตร์ (Static Loadings) เพียงอย่างเดียว นั้น สมการทั่วไปของสมดุลทางสถิตยสำหรับของแข็ง สามารถแสดงได้โดยการกำหนดให้ค่าของแรงเฉื่อยซึ่งอยู่ทางด้านขวามือของสมการที่ (2.12) มีค่าเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$L^T \sigma + f_b = 0 \quad (2.13)$$

สมการที่ (2.13) คือสมการที่ทั่วไปนิยมเรียกว่าเป็น “Strong Form” ของสมการอนุพันธ์ย่อย สำหรับปัญหาของของแข็ง สมการดังกล่าว หมายถึง ผลเฉลยของตัวแปรหลัก (Primary Variables) ที่ต้องการทราบค่าในสมการที่ (2.13) นั้น เมื่อถูกแทนค่าลงไปแล้ว จะต้องทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริง สำหรับทุก ๆ ค่าที่อยู่ภายใต้ขอบเขตของปัญหาที่กำลังสนใจหรือศึกษาอยู่นั้นเอง

2.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)

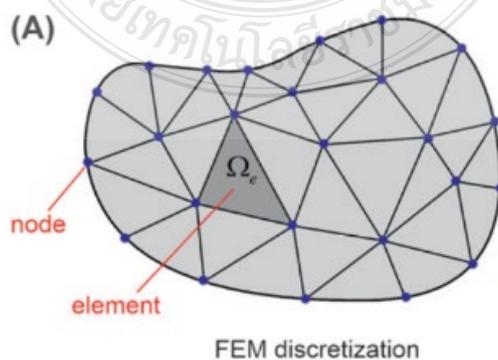
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นหนึ่งในหลายๆ วิธีการที่ใช้แก้ปัญหาเชิงตัวเลข (Numerical Method) มีการพัฒนาเพื่อแก้ปัญหาสมการอนุพันธ์หรือสมการอนุพันธ์ย่อยทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมซึ่งไม่สามารถหาคำตอบหรือผลเฉลยที่แท้จริง (Exact Solutions) ที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี (Analytical method) โดยตรง สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาเรื่องการถ่ายเทความร้อน ปัญหาทางด้านกลศาสตร์ของ ของแข็ง ทั้งทางด้านสถิตยศาสตร์และทางด้านพลศาสตร์ รวมทั้งยังสามารถใช้วิเคราะห์การไหลของ ของไหลได้ [2] แนวคิดที่คล้ายกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้มีมานานหลายศตวรรษแล้ว ตัวอย่างเช่น นักคณิตศาสตร์โบราณพบเส้นรอบวงของวงกลมโดยการประมาณโดยเส้นรอบวงของรูปหลายเหลี่ยม [3] ดังที่แสดงในรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 ขอบเขตล่างและบนกับเส้นรอบวงของวงกลม

ช่วงต้นทศวรรษ 1940 วิศวกรและนักคณิตศาสตร์เริ่มพัฒนาวิธีการเชิงตัวเลขเพื่อแก้ปัญหาโครงสร้างที่ซับซ้อน โดยทฤษฎีความยืดหยุ่นมีความก้าวหน้าอย่างมาก จากผลงานของนักคณิตศาสตร์และวิศวกรประยุกต์ เช่น Richard Courant, Vito Volterra และ Ronald Rivlin แนวคิดของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) ถูกอธิบายไว้ในปี 1956 เมื่อ Turner et al. ใช้ pinjointed bar และ triangular plates ในการคำนวณโครงสร้างเครื่องบิน และได้รับความนิยมอย่างมากเนื่องจากการพัฒนาคอมพิวเตอร์ดิจิทัลความเร็วสูง [4] M.J. Turner, R.W.Clough, H.C. Martin และ L.J. Topp ได้ตีพิมพ์บทความซึ่งอธิบายถึง “Stiffness Method” สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้าง ซึ่งเป็นพื้นฐานของ Finite Element Analysis (FEA) ในช่วงนี้คอมพิวเตอร์เริ่มปรากฏขึ้น ทำให้ Finite Element Analysis ที่คำนวณมาสามารถนำไปใช้ได้จริง ตั้งแต่ศตวรรษที่ 1980 เป็นต้นมา Finite Element Analysis ถูกพัฒนาอย่างต่อเนื่องด้วยความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์และอัลกอริธึมเชิงตัวเลข เทคนิคการวิเคราะห์แบบไม่เชิงเส้น เช่น การเสียรูปขนาดใหญ่ ความไม่เชิงเส้นของวัสดุ สามารถแก้ไขได้โดยใช้ Finite Element Analysis วิธีนี้กลายเป็นเครื่องมือสำคัญในการออกแบบและวิเคราะห์ทางวิศวกรรมในอุตสาหกรรมต่างๆ รวมถึงยานยนต์ การบินและอวกาศ และวิศวกรรมโยธา

หลักการพื้นฐานที่สำคัญของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ การแบ่งระบบโครงสร้างที่ซับซ้อนหรือโดเมนของปัญหา (Discretization) ออกเป็นองค์ประกอบที่เล็กลงและเรียงง่ายขึ้น ที่เรียกว่าเอลิเมนต์ (Elements) โดยที่แต่ละเอลิเมนต์จะทำการเชื่อมต่อกันด้วยจุดต่อ (Nodes) ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 2.8 การสร้างสมการ จะแบ่งออกเป็นสองระดับ ในระดับแรก องค์ประกอบจะถูกกำหนดด้วยรูปเรขาคณิต เป็นฟังก์ชันรูปร่าง ฟังก์ชันเหล่านี้จะช่วยให้สามารถประมาณค่าที่เราไม่ทราบค่า เป็นการสร้างสมการในระดับเอลิเมนต์โดยอาศัยความสัมพันธ์ของสมการที่กล่าวถึงแล้วในหัวข้อที่ 2.1.2 เรียกว่าสมการสติฟเนสของเอลิเมนต์ (Element Stiffness Equation) ในระดับที่สอง เป็นการสร้างสมการสติฟเนสของทั้งโดเมนใช้ การเชื่อมต่อ Nodes ขององค์ประกอบที่อยู่ติดกันเพื่อสร้างระบบสมการปัญหาซึ่งได้มาจากการรวมกันของสมการในระดับที่หนึ่งนั่นเอง เรียกว่า สมการสติฟเนสหลัก (Global Stiffness Equation) ความถูกต้องและความน่าเชื่อถือของผลลัพธ์จะได้รับการประเมินโดยเปรียบเทียบกับโซลูชันการวิเคราะห์ที่รู้จัก ข้อมูลการทดลอง หรือแบบจำลองตัวเลขที่ผ่านการตรวจสอบแล้วอื่นๆ หลักการพื้นฐานของไฟไนต์เอลิเมนต์เหล่านี้เป็นกรอบสำหรับการประมาณเชิงตัวเลขของระบบที่ซับซ้อน ทำให้วิศวกรและนักวิทยาศาสตร์สามารถวิเคราะห์และทำนายพฤติกรรมของปรากฏการณ์ทางกายภาพต่างๆ ได้



รูปที่ 2.8 การแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย [5]

2.2.1 สมการพื้นฐานวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (Smooth Finite Element Method)

ขั้นตอนการสร้างสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (S-FEM Smooth Finite Element Method) สำหรับการแก้ปัญหาความเค้นของของแข็งในระนาบนั้น สามารถสรุปแบบสังเขปได้ดังนี้ กระบวนการเริ่มจากการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย โดยภายในเอลิเมนต์หลักของปัญหาจะเป็นเอลิเมนต์รูปทรงเหลี่ยมหลายหน้า (Cell-based N-Sides Polygonal Smoothed Finite Element) (อาจหมายถึงรวมถึงเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมสี่เหลี่ยมด้วย) เช่นเดียวกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเดิมหรือใช้กระบวนการที่เรียกว่า Delaunay Triangulation ก็ได้ สร้างสนามการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement Field) และทำการสร้างสนามความเครียดสม่ำเสมอโดยใช้ค่าของฟังก์ชันการประมาณภายในหรือฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Functions) โดยอาศัยเทคนิคที่เรียกว่า Strain or Gradient Smoothing Technique ตลอดทั้งโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (Arbitrary Smoothing Domain) ที่ได้ทำการแบ่งไว้ภายในเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (Cell-Based N-Sides Polygonal Smoothed Finite Element) แล้ว สนามความเครียดสม่ำเสมอนี้ถูกสร้างผ่านการอินทิเกรตของพื้นที่ขอบเขตนั่นเองโดยไม่ต้องทำการ Mapping ระหว่าง Physical และ Parent Coordinates โดยที่ขั้นตอนทั้งหมดจากนี้ต่อไปก็เหมือนกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเดิม

สมการสมดุลสถิตย์ (Equilibrium Equation) สำหรับปัญหาอีลาสติคที่มีโดเมน Ω และขอบเขต Γ สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.14)$$

ร่วมกับสมการเงื่อนไขขอบ $\sigma_{ij}n_j = t_i$ บนขอบเขต Γ_t และ $u_i = \bar{u}_i$ บนขอบเขต Γ_u เมื่อ σ_{ij}, b_i และ n_i คือเทนเซอร์ของความเค้น เวกเตอร์ของแรงเนื่องจากน้ำหนักและเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยตามลำดับ สมการ Variational Weak Form ของมันคือ

$$\int_{\Omega} \delta \nabla(u_{ij}) D_{ijkl} \nabla(u_{kl}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i t_i d\Gamma = 0 \quad (2.15)$$

สำหรับสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ โอเปอเรเตอร์สม่ำเสมอ (Smoothing Operator) จะใช้เทคนิคของ Strain/Gradient Smoothing กับโดเมนสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักด้วยสมการ

$$\tilde{\nabla} u(x_s) = \frac{1}{A_s} \int_{\Omega_s} \nabla u(x) d\Omega \quad (2.16)$$

โดยที่ A_s คือพื้นที่ของโดเมนสม่ำเสมอและ $u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i$ นั่นเอง หากนำค่าฟังก์ชันการประมาณของการเปลี่ยนตำแหน่งนี้แทนลงในสมการที่ (2.16) จะทำให้การอินทิเกรต

ตลอดโดเมนสมำเสมออยู่นั้นเปลี่ยนเป็นการอินทิเกรตบนขอบเขตของโดเมนสมำเสมออยู่นั้น ๆ แทน
 ดังแสดงในสมการที่ (2.17)

$$\tilde{u}(x_s) = \frac{1}{A_s} \sum_{i=1}^n N_i(x) n(x) d\Gamma_i \quad (2.17)$$

อาศัยโอเปอเรเตอร์สมำเสมอขึ้น สนามความเครียดสมำเสมอ (Smoothed Strain Field) ก็
 สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกันกับสนามความเครียดแบบเข้ากัน (Compatible Strain Field) วิธีไฟไนต์
 เอลิเมนต์แตกต่างกันตรงที่ค่าของ Strain-Displacement Matrix นั้นคือ

$$\tilde{B}_i = \frac{1}{A_s} \int_{\Omega_s} B_i(x) d\Omega \quad (2.18)$$

เมื่อ \tilde{B}_i และ B_i คือ Strain-Displacement ของสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์
 เอลิเมนต์ตามลำดับ กล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า Strain-Displacement Matrix ของสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ก็คือ
 ค่าเฉลี่ยของ Strain-Displacement Matrix ของไฟไนต์เอลิเมนต์ตลอดทั้งโดเมนสมำเสมออยู่นั้นเอง

$$\tilde{B}_i(x_s) = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{i1}(x_s) & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{i2}(x_s) \\ \tilde{b}_{i2}(x_s) & \tilde{b}_{i1}(x_s) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

เอลิเมนต์หลักใด ๆ ใน 2 มิติทุกประเภท ไม่ว่าจะเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม
 หรือรูปหลายเหลี่ยมก็ตาม สามารถพิจารณาได้ว่าเกิดจากการนำเอาส่วนของเส้นตรงมาประกอบกันเข้าเป็น
 เอลิเมนต์นั้น ๆ ขอบแต่ละด้านของเอลิเมนต์หลัก จึงถูกพิจารณาว่าเป็นเอลิเมนต์อย่างง่ายคือเอลิเมนต์
 เส้นตรงที่มี 2 โหนด (2 Nodes Bar Element) เพราะฉะนั้น จึงใช้จุดของเกาส์ (Gauss Point) เพียงแค่จุด
 เดียว ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของความยาวขอบนั้น ๆ สำหรับการอินทิเกรต ก็เพียงพอที่จะให้ค่าที่แท้จริง
 ออกมาได้ ดังนั้น สมาชิกของเมทริกในสมการที่ (2.19) จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมได้ดังสมการ
 ที่ (2.20)

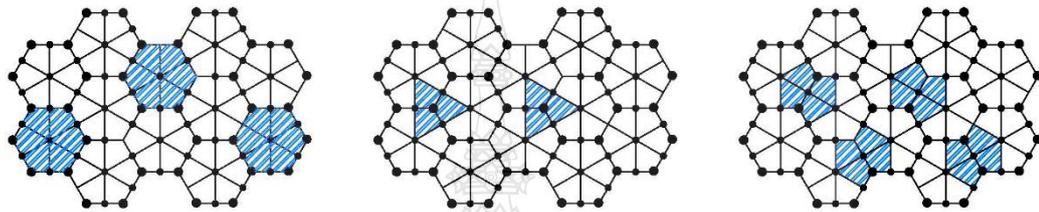
$$\tilde{b}_{ik}(x_s) = \sum_{i=1}^n N_i(x_i^{GP}) n_{ik} L_i (k = 1, 2) \quad (2.20)$$

จากสมการสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์(S-FEM Smooth Finite Element Method)
 ดังกล่าวข้างต้น ทำให้พบว่า ไม่ต้องทำการหาอนุพันธ์ย่อย (Derivatives) ของฟังก์ชันรูปร่างรวมทั้ง

จาโคเบียนเมทริก (Jacobian Matrix) ถือได้ว่าเป็นข้อดีประการหนึ่งที่เหนือกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเดิม (FEM Smooth Finite Element Method)

2.3. การวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม

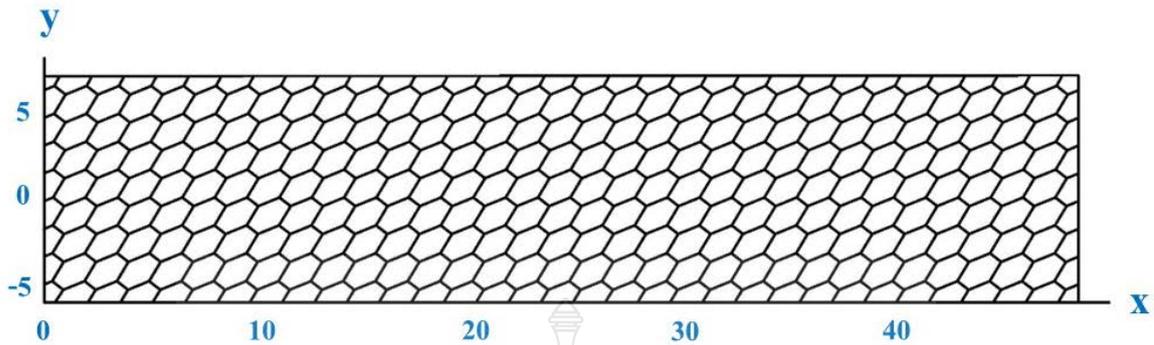
งานวิจัยในครั้งนี้นำมาแบ่งโดเมนของทั้งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยโดยใช้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (Polygonal Element) ดังแสดงในรูปที่ 2.9 การแบ่งโดเมนนั้นสามารถทำได้หลายแบบ คือ Cell Based SFEM (CSFEM) , Node-Based SFEM (NSFEM) และ Edge-Based SFEM (ESFEM)



Cell Based SFEM (CSFEM) Node-Based SFEM (NSFEM) Edge-Based SFEM (ESFEM)
รูปที่ 2.9 การแบ่งโดเมนแบบต่างๆ

เอลิเมนต์หลัก จะถูกนำมาแบ่งออกเป็นส่วยย่อย ๆ ที่เรียกว่าโดเมนสมำเสมอ (Smoothing Domain, SD) การแบ่งเอลิเมนต์หลักออกเป็นโดเมนหลายโดเมนเล็กย่อย ๆ นั้น ไม่ได้จำกัดอยู่เพียงแค่เอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยมเชิงเส้นคู่เท่านั้น แต่ยังสามารถที่จะนำไปใช้ในการแบ่งโดเมนสำหรับเอลิเมนต์หลักที่เป็นรูปหลายเหลี่ยม (Polygonal Element) ดังแสดงในรูปที่ 2.10 เรียกโดยทั่วไปว่าสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม (n-Sided Polygonal Cell-Based Smoothed Finite Element, nCS-FEM) ได้เช่นเดียวกัน ในกรณีนี้ โดเมนของปัญหาที่ศึกษาอยู่ จะถูกแบ่งย่อยออกเป็นเอลิเมนต์หลักที่มีด้านหลายเหลี่ยมและมีจำนวนของจุดต่อหรือโหนดเท่ากับจำนวนด้านของเอลิเมนต์นั่นเอง โดยหลักที่สำคัญของการสร้างเอลิเมนต์เหล่านี้ ยังคงเหมือนกันกับการสร้างเอลิเมนต์หลักรูปสี่เหลี่ยม กล่าวคือ จะต้องไม่มีช่องว่างและการทับซ้อนกันระหว่างเอลิเมนต์ นั่นคือ

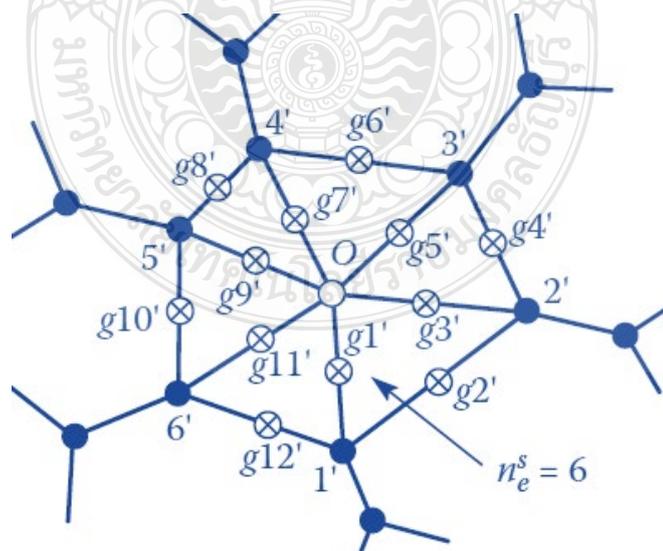
$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_e} \Omega_i^e \text{ และ } \Omega_i^e \cap \Omega_j^e = \emptyset, i \neq j$$



รูปที่ 2.10 สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม

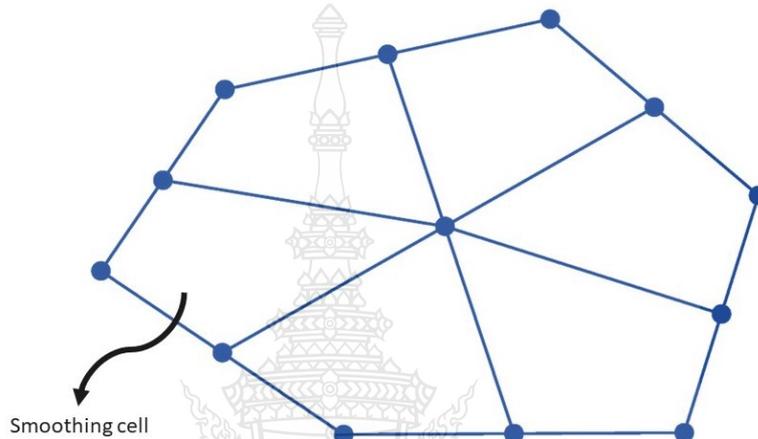
เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม สามารถถูกแบ่งย่อยออกเป็นโดเมนสม่ำเสมอ ๆ โดยการใช้อิเล็กเมนต์รูปสามเหลี่ยมและมีจำนวนของโดเมนสม่ำเสมอเท่ากับจำนวนด้านของรูปหลายเหลี่ยมหรือแบ่งออกเป็นโดเมนย่อยรูปสี่เหลี่ยมซ้ำอีกครั้งก็ได้ การแบ่งลักษณะเช่นนี้ จะทำให้ได้โดเมนย่อยสม่ำเสมอซึ่งมีจำนวนเท่ากับจำนวนด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมนั่นเอง ความจริงข้อนี้ ถือได้ว่าเป็นข้อสำคัญข้อหนึ่งของหลักการสร้างเอลิเมนต์หรือโดเมนย่อยสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักที่จะต้องมีความน้อยเท่ากับ $2n/3$ เมื่อ n คือจำนวนของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของโหนดทั้งหมดนั่นเอง [6]

การแบ่งโดเมนสม่ำเสมอ (Smoothing Domain/Cell) แบบแรก ใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมในการแบ่ง เริ่มจากการหาตำแหน่งของจุดเซ็นทรอยด์ของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมก่อน จากนั้น จึงทำการสร้างเส้นเชื่อมต่อระหว่างโหนดต่าง ๆ ของเอลิเมนต์หลายเหลี่ยมกับจุดเซ็นทรอยด์นั้น ก็จะได้เอลิเมนต์หรือโดเมนย่อยรูปสามเหลี่ยมภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมออกเป็นโดเมนย่อยสม่ำเสมอรูปสามเหลี่ยม [5]

สำหรับแบบที่สอง ทำการแบ่งเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมดังกล่าว ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย สม่่าเสมอรูปสี่เหลี่ยม สามารถทำได้ด้วยการกำหนดจุดกึ่งกลางของด้านแต่ละด้านรอบเอลิเมนต์หลัก รูปหลายเหลี่ยมนั้นเพิ่มภายหลังจากการหาตำแหน่งจุดเซ็นทรอยด์เรียบร้อยแล้ว ทำการสร้างเส้น เชื่อมโยงระหว่างโหนดแต่ละโหนด ไปยังจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสองซึ่งเชื่อมโยงกับโหนดนั้นแล้วลากเส้น ต่อไปยังจุดเซ็นทรอยด์ ทำซ้ำโดยการเปลี่ยนโหนดไปจนกระทั่งครบทุกโหนด ก็จะได้เอลิเมนต์ย่อย สม่่าเสมอรูปสี่เหลี่ยมสำหรับเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม ๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 การแบ่งเอลิเมนต์ย่อยรูปสี่เหลี่ยมภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม

2.3.1 การสร้างสมการสติเฟเนสหลักของ nCS-FEM

สมการสติเฟเนสหลักของระบบสำหรับวิธีการแบ่งโดเมนด้วยเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม นั้น คล้ายกันกับสมการสติเฟเนสหลักของการแบ่งโดเมนด้วยรูปสี่เหลี่ยม กล่าวคือ

$$\bar{K}^{nCS-FEM} \bar{d} = \bar{F} \quad (2.21)$$

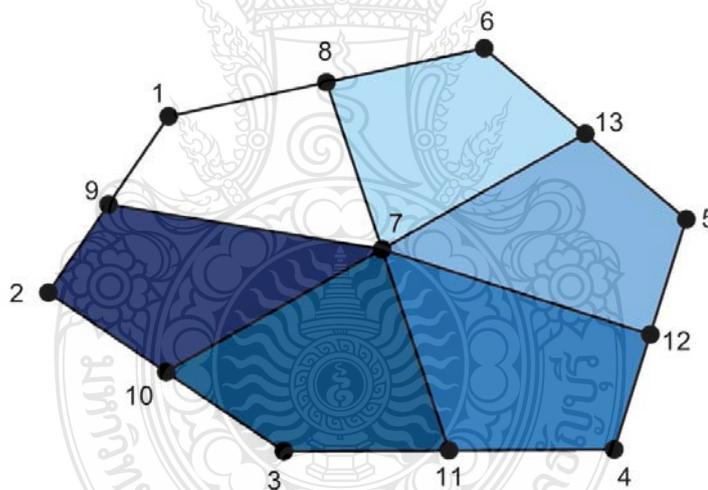
โดยที่

$$\begin{aligned} \bar{K}_{ij}^{nCS-FEM} &= \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{n_e^s} \int_{\Omega_{i,m}^s} \bar{B}_i^T E \bar{B}_j d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_e^s} \int_{\Omega_{i,m}^s} \bar{B}_i^T E \bar{B}_j A_{i,m}^s d\Omega \end{aligned} \quad (2.22)$$

เมื่อ $A_{i,m}^s = \int_{\Omega_{i,m}^s} d\Omega$ คือ พื้นที่ของโดเมนสม่่าเสมอรูปหลายเหลี่ยม (Polygonal Smoothing Domain) นั้นเอง

2.3.2 การประมาณค่าของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function Evaluation)

จากหลักการของ nCS-FEM ที่ใช้ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องและเป็นเชิงเส้นบนขอบของโดเมนสม่ำเสมอหรือโดเมนต่อเนื่องที่ถูกแบ่งไว้แล้วเหล่านั้น การหาค่าของเมทริกซ์ต่อเนื่องที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเปลี่ยนตำแหน่ง (Smoothed Strain-Displacement Matrix) $\bar{\mathbf{B}}_I$ ที่แสดงในสมการที่ 2.21 และ 2.22 นั้น สามารถทำได้ด้วยการใช้เพียงค่าของฟังก์ชันการประมาณรูปร่าง (Shape Functions) สำหรับ เอลิเมนต์แท่ง ที่มี 2-node (Linear Shape Function) ณ จุดกึ่งกลางของด้านที่ประกบกันเข้าเป็นโดเมนต่อเนื่องได้โดยตรง โดยที่ไม่จำเป็นต้องทำการหาค่าอนุพันธ์ของมัน ซึ่งถือเป็นข้อดีของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์เมื่อเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพราะฉะนั้น ในทางปฏิบัติ การหาค่าของฟังก์ชันรูปร่างสำหรับโดเมนย่อยต่อเนื่องแบบเอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยม ณ ตำแหน่งกึ่งกลางด้านหรือตำแหน่งของ Gauss Point ดังในรูปที่ 2.13 นั้น สามารถหาได้ด้วยการประมาณค่าภายในแบบเชิงเส้น (Linear Interpolation) ของค่าฟังก์ชันรูปร่างระหว่างจุดปลายทั้งสองของด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม ซึ่งเป็นที่ตั้งของตำแหน่งของจุด Gauss Point นั้นเอง ค่าของฟังก์ชันรูปร่างการประมาณภายในสำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนี้ สามารถหาได้ดังต่อไปนี้ พิจารณารูปที่ 2.13 ค่าฟังก์ชัน N_1-N_6 มีค่าเท่ากับ 1 ในขณะที่ค่าของฟังก์ชันดังกล่าว มีค่าเท่ากับ $1/6$ ณ ตำแหน่งเซ็นทรอยด์ จุด 7



รูปที่ 2.13 การหาค่าฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์ย่อยรูปสี่เหลี่ยมภายในเอลิเมนต์หลายเหลี่ยม

เมื่อทราบตำแหน่งของ Gauss Points ที่ต้องการแล้ว ก็สามารถหาค่าของฟังก์ชันรูปร่างการประมาณภายในดังกล่าวได้อย่างง่ายดาย ตัวอย่างเช่น ค่าของฟังก์ชันรูปร่าง ณ ตำแหน่ง Gauss Point 9 ก็ได้มาจากการหาค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันรูปร่าง ณ จุด 1 และ จุด 2 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $(1+1)/2 = 1/2$ หรือหากต้องการหาค่าของฟังก์ชันการประมาณรูปร่างภายในดังกล่าว ณ ตำแหน่งของ Gauss Point ซึ่งอยู่กึ่งกลางของด้าน 10 - 7 ก็สามารถหาได้โดยหาค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันดังกล่าว ณ จุด 10 กับค่าของฟังก์ชัน ณ จุด 7 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $(1/2 + 1/6)/2 = 1/3$ นั่นเอง ค่าของฟังก์ชันการประมาณรูปร่างภายใน ณ ตำแหน่งอื่น ๆ ก็ สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกันโดยไม่มี ความจำเป็นที่จะต้องทำการหา

อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันการประมาณรูปร่างภายในดังกล่าวให้ละเอียดมากเกินไปนัก จะสามารถช่วยลดระยะเวลาของการคำนวณลงได้อย่างมีนัยสำคัญ

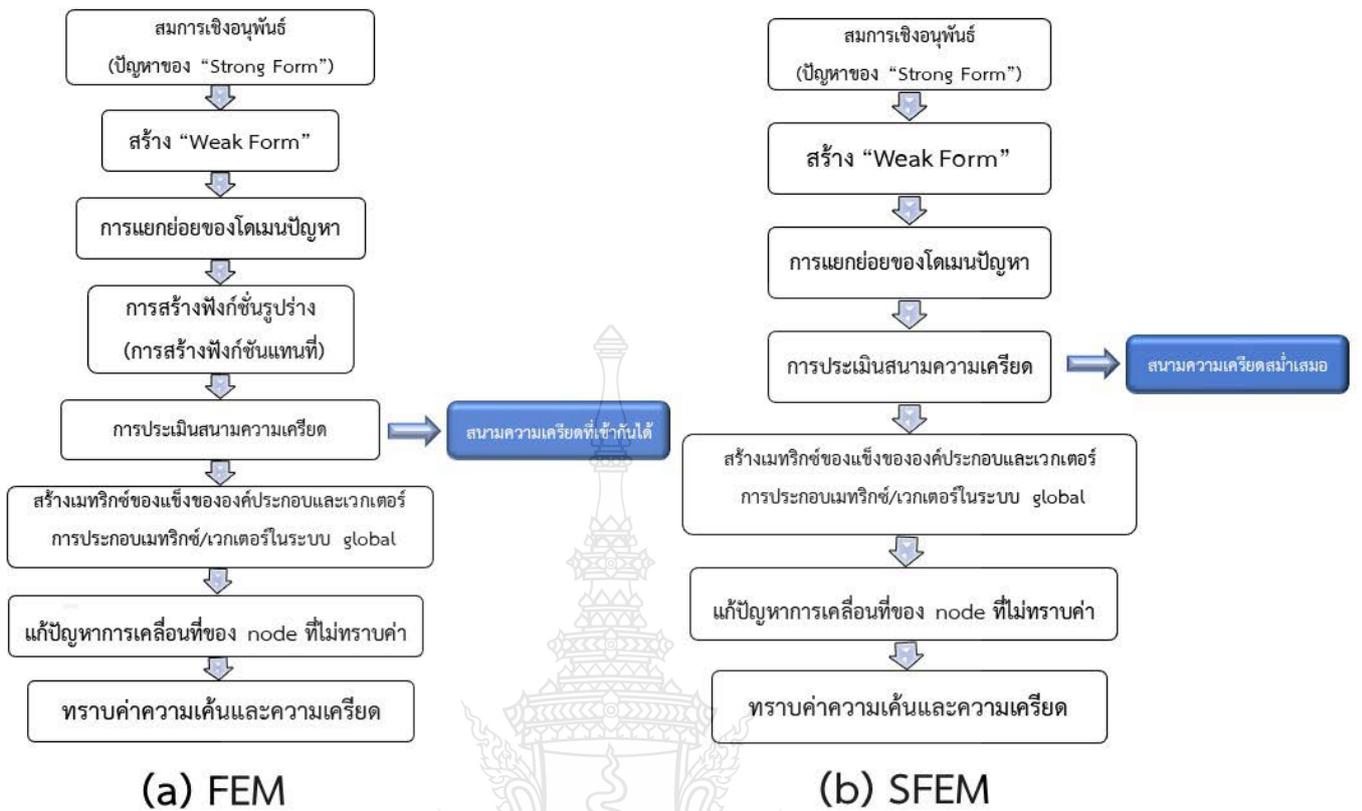
2.4. ความแตกต่างระหว่างไฟไนต์เอลิเมนต์กับสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์

ทั้งวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) และวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (SFEM) เป็นเทคนิคเชิงตัวเลขที่ใช้ในการประมาณคำตอบสำหรับปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDE) แม้ว่าทั้งสองวิธีจะมีความคล้ายคลึงกันในแง่ของหลักการพื้นฐาน แต่ก็มี ความแตกต่างกันอย่างชัดเจนระหว่างทั้งสองวิธี

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) เป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์อื่นๆ ด้วยการแบ่งโดเมนที่ซับซ้อนออกเป็นโดเมนย่อยที่เล็กกว่าและง่ายกว่า ซึ่งเรียกว่าไฟไนต์เอลิเมนต์ โดเมนจะถูกแยกออกเป็นตาข่ายภายในแต่ละเอลิเมนต์ การประมาณค่าของปัญหาจะทำได้โดยใช้ฟังก์ชันพื้นฐานที่กำหนดไว้เหนือองค์ประกอบ ฟังก์ชันพื้นฐานเหล่านี้มักเป็นสมการเชิงเส้นหรือสมการอนุพันธ์ลำดับที่สูงกว่า และแสดงเป็นชุดค่าผสมเชิงเส้นของฟังก์ชันพื้นฐานเหล่านี้ และค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่รู้จักของชุดค่าผสมนี้จะถูกกำหนดโดยการกำหนดเงื่อนไขบางอย่าง เช่น การปฏิบัติตามเงื่อนไขสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ควบคุมและเงื่อนไขขอบเขต วิธีแก้ปัญหาโดยรวมได้มาจากการประกอบปัญหาองค์ประกอบตามการเชื่อมต่อและการแก้ระบบสมการที่เป็นผลลัพธ์

วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (SFEM) ได้รับการออกแบบมาเพื่อจับภาพคุณลักษณะหรือปรากฏการณ์เพิ่มเติมที่มีอยู่ในปัญหา ซึ่งฟังก์ชันพื้นฐานมาตรฐานเพียงอย่างเดียวอาจไม่สามารถจับภาพได้อย่างเพียงพอ คุณลักษณะเพิ่มเติมเหล่านี้อาจรวมถึงความไม่ต่อเนื่อง ลักษณะเอกฐาน หรือลักษณะการทำงานที่ซับซ้อนอื่นๆ การสร้างความเครียดสม่ำเสมอ (Smoothed Strain Field) โดยตรงจากเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งที่สมมุติไว้แล้ว โดยไม่ต้องทำการหาอนุพันธ์ย่อยและขณะเดียวกัน ก็ยังคงมีคุณสมบัติของการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำโดยไม่ต้องไปกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เดิม

สำหรับขั้นตอนในการวิเคราะห์ส่วนอื่น ๆ ซึ่งได้แก่ การสร้างสมการสติฟเนสของเอลิเมนต์ การสร้างเวกเตอร์แรงของเอลิเมนต์ การนำเอาทั้งสติฟเนสและเวกเตอร์แรงในระดับเอลิเมนต์ (Local Coordinate System) มาประกอบกันเข้าเป็นสติฟเนสและเวกเตอร์แรงหลัก (Global Coordinate System) ขั้นตอนการประยุกต์สมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) รวมไปถึงขั้นตอนของการแก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ยังคงมีลักษณะเดียวกันกับที่ใช้ในขั้นตอนของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เดิมทุกประการ รูปที่ 2.14 แสดงให้เห็นถึงไดอะแกรมของการวิเคราะห์ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์เดิม โดยแสดงให้เห็นถึงส่วนของการสร้างสมการความเครียดที่แตกต่างกันสำหรับสองวิธีดังกล่าว



รูปที่ 2.14 ความแตกต่างของขั้นตอนการสร้างความเครียดทั้ง 2 วิธี

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape functions) สำหรับเอลิเมนต์ที่มีจำนวนของด้านมากกว่า 4 ด้านนั้น ได้ถูกเสนอขึ้นเป็นครั้งแรกโดย Wachspress [7],[8] โดยอาศัยหลักการของรูปทรงทางเรขาคณิตแบบ เเปอร์สเปคทีฟ (Principles of perspective geometry) และถูกเรียกว่า “Wachspress shape function” ซึ่งในขณะนั้นยังไม่เป็นที่สนใจมากนัก วิธีนี้เริ่มกลับมาได้รับความสนใจอีกครั้งหนึ่งตั้งแต่ปี ค.ศ.2000 เป็นต้นมา มีนักวิจัยหลายกลุ่ม ใช้วิธีนี้ สำหรับการแก้ปัญหาของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้าน โดยมีชื่อเรียกที่แตกต่างกันออกไป ได้แก่ n-Sided Polygonal Smoothed Finite Element Method (nSFEM), Mimetic Finite Difference Method (MFD), Voronoi Cell Finite Element Method (VCFEM), Hybrid Polygonal Element (HPE), Virtual Element Method (VEM) และ Virtual Node Method (VNM) เป็นต้น

วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบแบ่งโดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม (nCSFEM) นั้น มีข้อดีกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อยู่หลายประการ เช่น ความมีเสถียรภาพของมันทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าและสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาของวัสดุแบบเกือบจะบีบอัดไม่ได้ ร่วมกับเทคนิคที่เรียกว่า Selective Integration เพื่อหลีกเลี่ยงการเกิดปรากฏการณ์ Volumetric Locking [9] เทคนิคอีกอย่างในการหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าวนั้น สามารถทำได้โดยการใช้วิธีการผสมผสานการวิเคราะห์ระหว่าง nESFEM ร่วมกันกับวิธี nNSFEM เพื่อทำการแก้ปัญหาของไหลในการป้องกันการเกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่า Volumetric Locking โดยพบว่า คำตอบที่ได้นั้น มีอัตราของการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำตรงที่สูงกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ Nguyen et al. [10] , [11]

การสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอในวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เอลิเมนต์มีด้านมากกว่า 4 ด้าน สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งในระนาบ 2 มิติ นั้น ซึ่งสามารถจำแนกตามประเภทการสร้างโดเมนย่อยได้ 3 แบบนั้น พบว่า การแบ่งเซลล์หรือโดเมนย่อยตามโหนดของเอลิเมนต์หลักนั้น (nESFEM) ให้ผลลัพธ์ที่มีค่าความเบี่ยงเบนจากผลเฉลยแม่นยำตรงต่ำที่สุด Nguyen et al. [12] นอกจากนี้ ค่าสตีเฟนสที่ได้จะมีค่าอยู่ระหว่างค่าสตีเฟนสที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมซึ่งใช้การสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลัก (nCSFEM) กับการแบ่งเซลล์หรือโดเมนย่อยตามด้านของเอลิเมนต์หลัก (nNSFEM) นอกจากนี้ ยังมีนักวิจัยอีกหลายกลุ่ม ที่พบว่า คำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วย nCSFEM สำหรับการประยุกต์ใช้กับปัญหาในหลาย ๆ ทางเลือก เช่น ปัญหาปฏิสัมพันธ์ต่อกันระหว่างของแข็งและของไหล (Fluid-Solid Interaction, FSI) [11] ปัญหาการรับแรงบิดทางกลศาสตร์ของแข็งสำหรับวัสดุประเภทยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elasticity) [13] หรือ ปัญหาด้านกลศาสตร์ของแข็ง [12] ทั่วไป เป็นต้น

ค่าของผลเฉลยที่ได้นั้น จะเป็นค่าขอบเขตบน (Upper Bound) เมื่อเทียบกับค่าของผลเฉลยแม่นยำตรงของมัน เช่น ปัญหาของการเสีรูปร่างอย่างมากของของแข็ง (Large Deformation) Biabanaki et al. [14] ปัญหาของการสัมผัสและชนกัน (Contact-Impact Problem) เมื่อมีการใช้โครงตาข่ายแบบไม่สอดคล้อง (Non-Conforming Mesh) Biabanaki et al. [15] รวมทั้งปัญหาเกี่ยวกับกลศาสตร์ของการแตกหัก (Fracture Mechanics) Khoei et al. [16] เป็นการยืนยันถึงประสิทธิภาพของการวิเคราะห์สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบใช้เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมได้เป็นอย่างดี เนื่องมาจากความมีประสิทธิภาพในการคำนวณและง่ายต่อการสร้างโดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์ วิธีสมูทไฟไนต์

เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบแบ่งเซลล์ย่อยภายในเอลิเมนต์ ได้ถูกนำไปผสมผสานกับการคำนวณด้วยวิธีอื่นอีกหลายวิธี เช่น Katili et al. [17] ได้ทำการ ทำการศึกษาปัญหาของแผ่น (Plate Problem) แบบ Functionally Graded Material (FGM) โดยประยุกต์วิธี nCSFEM ร่วมกับ DKMQ [18] Natarajan et al. [19] ได้ใช้ ESFEM ร่วมกับวิธี SBFEM สำหรับการวิเคราะห์แฟคเตอร์ความเข้มข้นของความเค้น (Stress Intensity Factor) ในโหมดที่ 1 เป็นต้น

ผลงานวิจัยเกี่ยวกับการศึกษาเรื่อง FSI ของการไหลแบบ Viscous Incompressible โดยใช้การสร้างโครงตาข่ายแบบเลื่อนไหล (Sliding Mesh) [20] ให้ข้อสรุปว่า วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม มีศักยภาพในการคำนวณสูงกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างมีนัยสำคัญ อันเนื่องมาจากเอลิเมนต์ของปัญหาของไหลดังกล่าว ได้ถูกแบ่งโดยใช้โครงตาข่ายหลักแบบเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมที่มีโดเมนย่อยสม่ำเสมอซึ่งเป็นอิสระต่อกันนั่นเอง

งานวิจัยล่าสุดสำหรับการประยุกต์ใช้วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบไปด้วยเอลิเมนต์ซึ่งมุมภายในมีค่าเกิน 180 องศา (Nonconvex) [21] สำหรับปัญหาของแข็งแบบอีลาสติคและอีลาสติคพลาสติคนั้น พบว่า สามารถจัดการกับเอลิเมนต์ประเภทนี้ได้อย่างหลากหลายรูปแบบโดยใช้เทคนิคที่เรียกว่า Ear Clipping ในขณะที่ยังคงมีประสิทธิภาพและความแม่นยำของการคำนวณที่ดีเยี่ยม



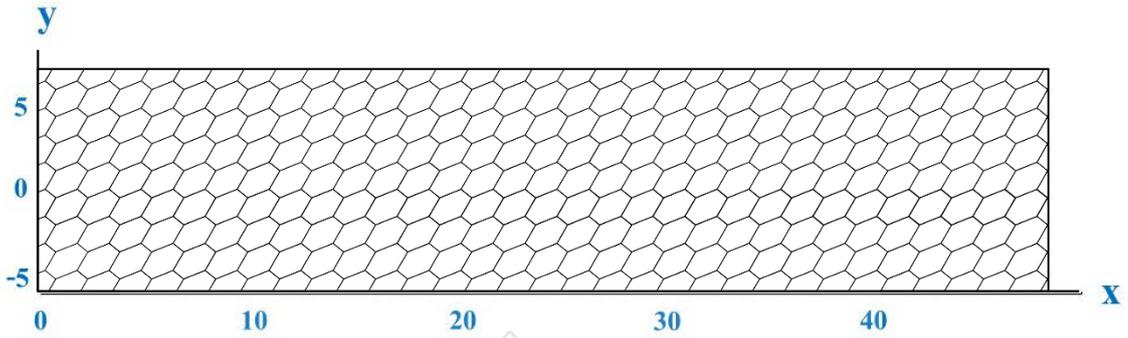
บทที่ 3 วิธีการวิจัย

พื้นฐานที่สำคัญของวิธีสมูทไฟไนต์ (Smooth Finite Element Method) สำหรับใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งได้อธิบายไว้ในบทที่ผ่านมา รวมถึงการสร้างเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม (N-Side Polygonal Element) เพื่อให้ครอบคลุมทั่วทั้งโดเมนของปัญหา สำหรับบทนี้ จะกล่าวถึงวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่มีการแบ่งเซลล์ย่อยภายในเอลิเมนต์หลักแบบไม่ต่อเนื่อง การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติ (Two-Dimensional Plane Stress Problem) ที่เหมาะสม อันจะนำไปสู่ขั้นตอนของการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อนำค่าที่ได้เหล่านั้นไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี ซึ่งจะได้กล่าวถึงเป็นหัวข้อสุดท้ายในส่วนนี้

3.1 สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่มีการแบ่งเซลล์ย่อยภายในเอลิเมนต์หลักแบบไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous Polygonal Cell-Base Smoothed Finite Element)

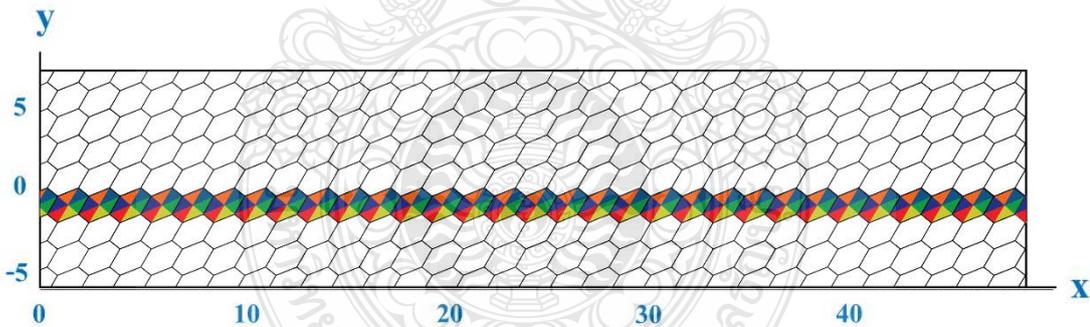
ในด้านวิศวกรรม การแยกโดเมนที่นำเชื่อถือเป็นสิ่งจำเป็น และต้องรวมถึงการออกแบบตัวแปรและเงื่อนไขขอบที่เหมาะสมด้วย วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) ใช้ในการเพิ่มประสิทธิภาพโครงสร้างเนื่องจากมีความยืดหยุ่นในการแก้ไขปัญหาสมการอนุพันธ์ โดยทั่วไปใน FEM จะใช้เซลล์รูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยมที่มีลำดับต่ำกว่า ซึ่งเซลล์ไฟไนต์เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมใช้งานง่าย แต่ประสิทธิภาพไม่สูงเท่าเซลล์รูปสี่เหลี่ยม ในทางกลับกัน เซลล์รูปสี่เหลี่ยมให้ผลลัพธ์ที่ค่อนข้างดีกว่าเมื่อเทียบกับรูปสามเหลี่ยม แต่ก็มักจะพบกับความยากลำบากในการสร้างตาข่ายสำหรับโดเมนในปัญหาที่ซับซ้อนมาก นอกจากนี้ เป็นที่ทราบกันดีว่าองค์ประกอบจำกัดรูปสี่เหลี่ยมอาจทำให้เกิดการพังทลายแบบหมุนได้ [22] เพื่อแก้ไขความยุ่งยากเหล่านี้ ทางเลือกหนึ่งที่ใช้การได้ คือ การผ่อนคลายข้อจำกัดในการใช้เซลล์รูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยม ให้สามารถใช้องค์ประกอบที่มีจำนวนด้านตามความต้องการภายในกรอบของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหลายเหลี่ยม

เทคนิคของการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (n-Sides Polygonal Element) สำหรับการวิเคราะห์ด้วยสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ อาศัยโปรแกรมการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่ถูกเขียนขึ้นมาด้วยโปรแกรม MATLAB ซึ่งเป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการวิเคราะห์แก้ไขปัญหา ซึ่งจะใช้สำหรับการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมสำหรับโดเมนปัญหาที่มาจากรูปทรงเรขาคณิตขั้นพื้นฐานได้แก่ เส้นตรง สี่เหลี่ยม วงกลม วงรี และมีรูปทรงไม่สลับซับซ้อนมากนัก [23] ตัวอย่างคานยื่นปลายที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์แบบหลายเหลี่ยม แสดงได้ดังรูปที่ 3.15



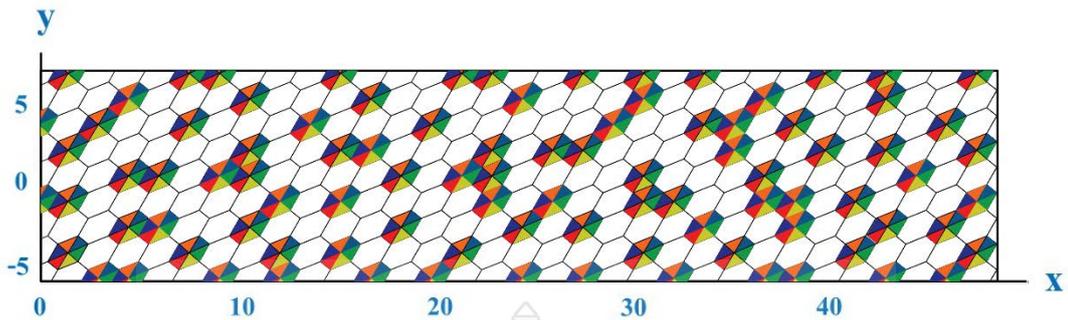
รูปที่ 3.15 การสร้างเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม

เมื่อคานยี่นตัวอย่างได้ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 3.15 ข้างต้นแล้ว ขั้นตอนต่อไป เป็นการสร้างเอลิเมนต์ย่อยภายในแต่ละเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม (Cell-Based Smoothing Domain) เอลิเมนต์ย่อยสมำเสมอเหล่านี้ จะมีจุดยอดร่วมกันที่ตำแหน่งเซนทรอยด์ (Barycenter) ของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมนั่นเอง การสร้างเอลิเมนต์ย่อยนี้ ทำได้ด้วยการเชื่อมโยงจุดเซนทรอยด์ของเอลิเมนต์หลักไปยังจุดกึ่งกลางด้านแต่ละด้านเพื่อสร้างรูปทรงสี่หน้าขึ้นมา จำนวนของเอลิเมนต์ย่อยสมำเสมอนี้ จะมีจำนวนเท่ากับจำนวนด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมนั่นเอง ลักษณะของเอลิเมนต์ย่อยดังกล่าว แสดงได้ด้วยพื้นที่ในส่วนที่แรเงาเพื่อความชัดเจน ดังแสดงในรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16 เอลิเมนต์ย่อยสมำเสมอรูปทรงสี่หน้า

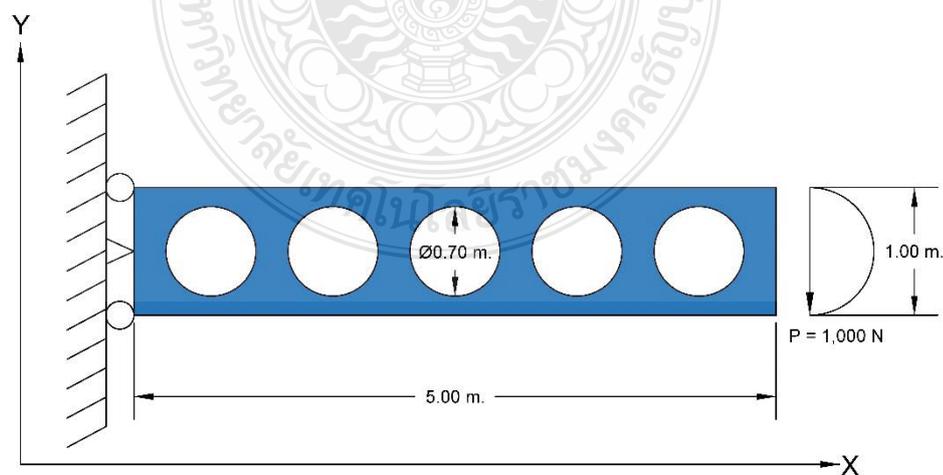
สำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ คานยี่นตัวอย่างดังแสดงในรูปที่ 3.16 หลังจากที่ได้ทำการแบ่งเอลิเมนต์ย่อยสมำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมด้วยเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมแล้ว (ขึ้นอยู่กับจำนวนด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้น) จะถูกพิจารณารูปแบบความเป็นไปได้ของความไม่ต่อเนื่องแบบสุ่ม รูปแบบของสมุทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบแบ่งโดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์หลักแบบไม่ต่อเนื่องนั้น แสดงได้ดังรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบแบ่งเซลล์ย่อยภายในเอลิเมนต์หลักแบบไม่ต่อเนื่อง

3.2 ปัญหาสำหรับการทดสอบ

งานวิจัยนี้ เป็นการวิเคราะห์ปัญหาในระนาบ 2 มิติ พิจารณาใช้ตัวอย่างของคานยื่น (Cantilever Beam) ที่มีความยาว 5.00 เมตร ลึก 1.00 เมตร มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของรูเจาะ 0.70 เมตร กำหนดให้ค่าคงที่ของวัสดุ คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุ และอัตราส่วนปัวซองมีค่าเท่ากับ 2×10^6 นิวตันต่อตารางเมตรและ 0.28 ตามลำดับ ในกรณีตัวอย่างนี้จะกำหนดให้คานยื่นมีฐานรองรับ (Support) ที่ปลายคานด้านซ้ายเป็นยึดหมุน (Hinged Support) ที่ระดับกึ่งกลางของความลึก ($T/2$) ให้ขอบด้านบนและด้านล่างเป็นฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ได้ในแนวตั้ง (Roller Support) เพื่อให้สามารถยับยั้งหรือยึดได้อย่างอิสระสอดคล้องกับค่าอัตราส่วนปัวซอง และในขณะที่ปลายคานด้านขวามือให้มีแรงกระทำในแนวตั้งที่มีการกระจายตัวของแรงเป็นรูปพาราโบลากระทำ 1000 นิวตัน โดยจะพิจารณาว่าตัวอย่างของคานที่ใช้ในการวิเคราะห์นี้เป็นปัญหาของความเค้นในระนาบสองมิติ ลักษณะของคานยื่นดังกล่าวจะแสดงไว้ในรูปที่ 3.18

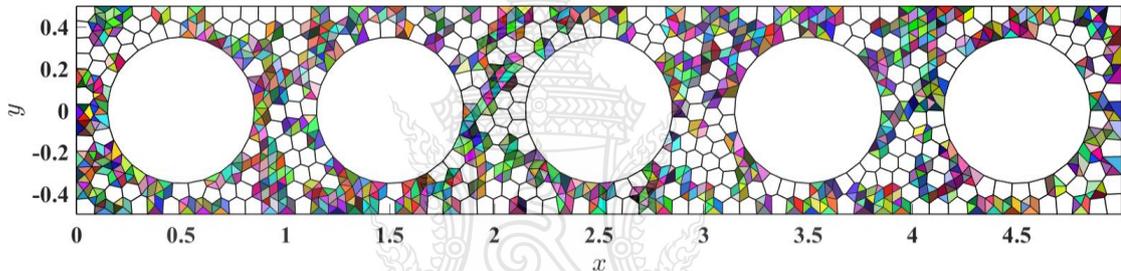


รูปที่ 3.18 คานยื่นปลาย (Cantilever Cellular Beam) รับแรงเฉือนปลายคาน

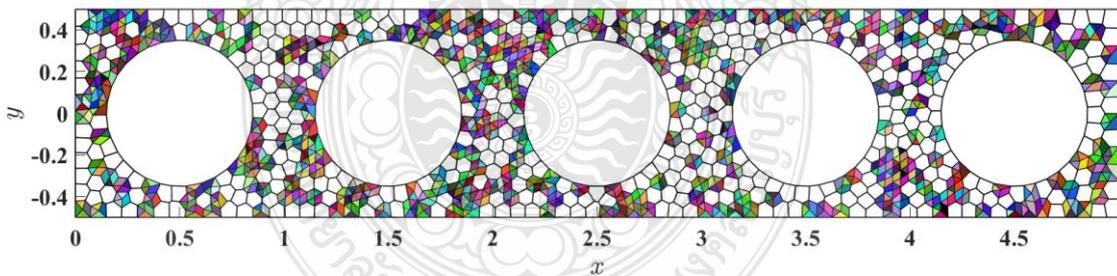
บทที่ 4

ผลการศึกษาวิเคราะห์

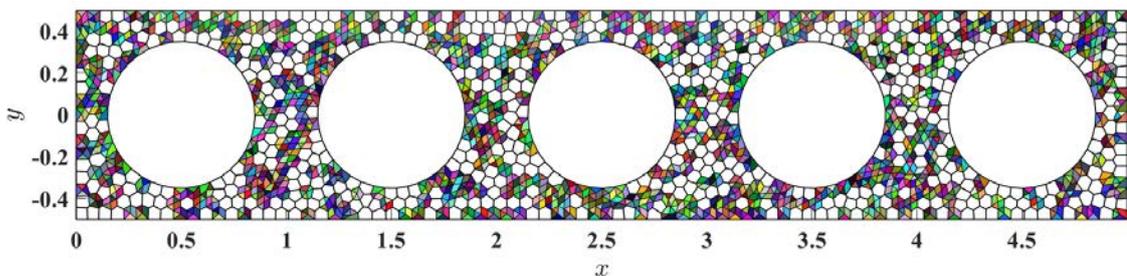
ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่จะนำไปใช้เพื่อเปรียบเทียบกับค่าที่วิเคราะห์ได้ทางทฤษฎี ได้แก่ ค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง และค่าความคลาดเคลื่อนที่ปลายคาน (Tip Displacement and Error Norm) รวมทั้งแสดงค่าการโก่งตัวของโหนดทั้งหมดด้านบนตลอดความยาวคาน ค่าของความเครียด (Strains) ค่าของความเค้น (Stresses) และอัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำ (Close-to-exact solution) โดยทำการวิเคราะห์จำนวนโครงตาข่ายจำนวน 3 ลำดับ โครงตาข่ายที่มีความละเอียดจากน้อย มีจำนวนเอลิเมนต์ 829 เอลิเมนต์ โครงตาข่ายปานกลาง มีจำนวนเอลิเมนต์ 1525 เอลิเมนต์ และโครงตาข่ายละเอียดมาก มีจำนวนเอลิเมนต์ 3927 เอลิเมนต์ตามลำดับ (ดังแสดงในรูป 4.19 ถึง รูป 4.21) ผลการศึกษาดังกล่าว มีรายละเอียดดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.19 เอลิเมนต์ที่ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยรูปหลายเหลี่ยมที่มีความละเอียดน้อย (829 เอลิเมนต์)

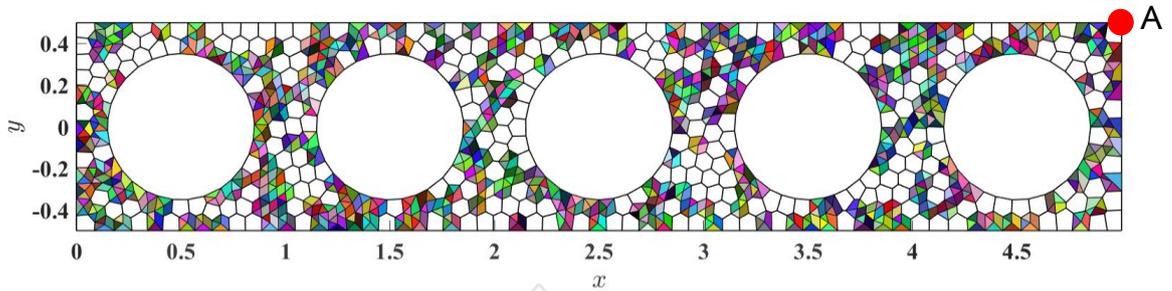


รูปที่ 4.20 เอลิเมนต์ที่ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยรูปหลายเหลี่ยมที่มีความละเอียดปานกลาง (1525 เอลิเมนต์)



รูปที่ 4.21 เอลิเมนต์ที่ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยรูปหลายเหลี่ยมที่มีความละเอียดมาก (3927 เอลิเมนต์)

4.1 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคานและค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน



รูปที่ 4.22 เอลิเมนต์ที่ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย (แสดงสี) และไม่ถูกแบ่ง (ไม่แสดงสี)

ค่าการโก่งตัว ณ จุด A ซึ่งเป็นจุดที่อยู่มุมบนด้านขวาของปลายคานที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูปที่มีเอลิเมนต์รูปทรงเหลี่ยมสี่หน้าจำนวนมากพอเพื่อให้ได้ค่าที่ลู่เข้าและสามารถใช้เป็นค่าของผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง (Close-to-exact solutions) ได้ จำนวนโหนดดังกล่าวมีจำนวน 9,628 และค่าของการโก่งตัวของจุด A สำหรับคานเซลล์ูลาร์ดังกล่าวมีค่าเท่ากับ -0.002705 ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง (U_{norm}) สามารถคำนวณได้ตามสมการที่ 4.27 คือ

$$U_{norm} = \frac{\|U_{exact} - U_{analysis}\|}{\|U_{exact}\|} \quad (4.27)$$

เมื่อ U_{exact} และ $U_{analysis}$ คือเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง ที่ได้จากทางทฤษฎีและจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical analysis) ตามลำดับ

ตารางที่ 4.1 การโก่งตัว ณ จุด A และค่ามาตรฐานความคลาดเคลื่อน

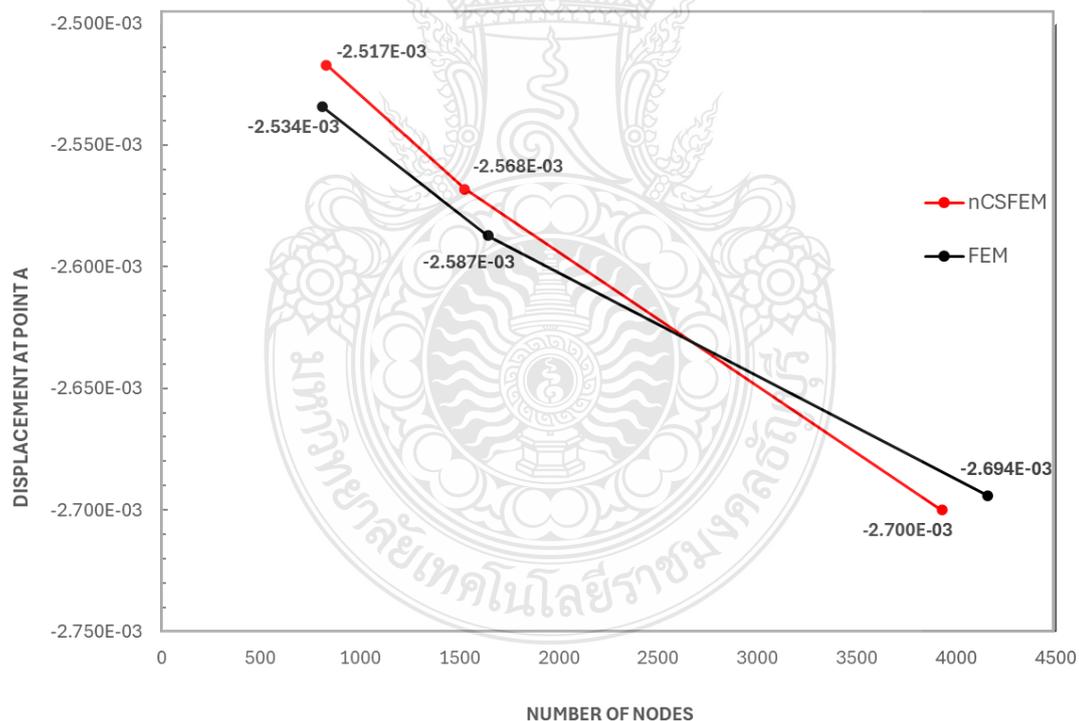
จำนวนเอลิเมนต์	จำนวนโหนด	การโก่งตัวของจุด A	ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน
829	1991	-0.002517	0.07565
1525	3518	-0.002568	0.05711
3927	8628	-0.002700	0.01301
REF	9628	-0.002705	-

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งที่ปลายคานสำหรับการวิเคราะห์ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับเปรียบเทียบกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีซึ่งมีค่าเท่ากับ -0.002705 เมตร

ผลจากการวิเคราะห์คานเซลล์ูลาร์ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่องตลอดทั่วทั้งโดเมนของปัญหานั้นพบว่า ค่าการโก่งตัว ณ จุด A (รูปที่ 4.22)

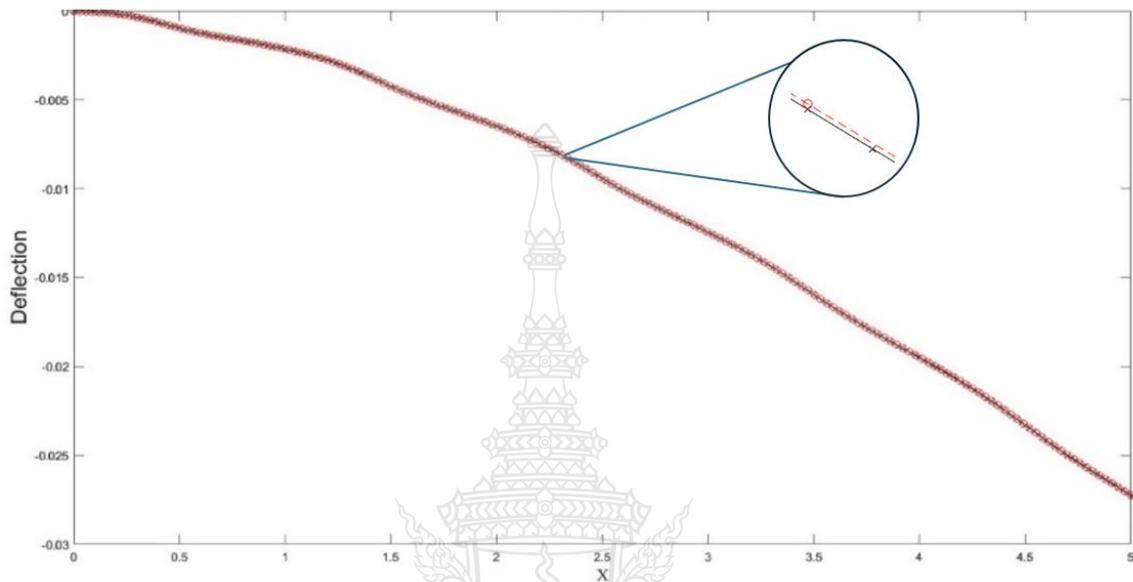
นั้น มีค่าเพิ่มขึ้นจาก -0.002517 เมตร เป็น -0.002568 เมตร และ -0.002700 เมตร สำหรับโครงตาข่ายที่มีความละเอียดจากน้อยซึ่งมีจำนวนเอลิเมนต์ 829 เอลิเมนต์ ไปยังโครงตาข่ายปานกลางมีจำนวนเอลิเมนต์ 1525 เอลิเมนต์และโครงตาข่ายละเอียดมากมีจำนวนเอลิเมนต์ 3927 เอลิเมนต์ตามลำดับ ซึ่งมีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกันกับวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขทั่วไป จำนวนของโหนดที่โครงตาข่ายความละเอียดมากนั้นมีจำนวน 8628 ซึ่งน้อยกว่าโหนดของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีค่าเท่ากับ 9628 โหนด นอกจากนี้ยังพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Error norms) ที่ได้ มีค่าลดลงจาก 0.07565, เป็น 0.05711 และ 0.01301 ตามลำดับเมื่อจำนวนโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจากน้อยไปมาก ดังนั้น สำหรับการวิเคราะห์ผลที่ได้ต่อไปจากนี้ จะเป็นการเปรียบเทียบผลที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่องโดยใช้โครงตาข่ายความละเอียดมาก กับผลเฉลยแม่นยำตรง Close-to-exact solutions เท่านั้น

รูปที่ 4.23 แสดงค่าการโก่งตัวที่จุด A ค่าที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี nCSFEM แบบแบ่งเซลล์ย่อยภายในเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง (แสดงด้วยเส้นสีแดง) เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (เส้นสีดำ) พบว่า ค่าการโก่งตัวที่ได้พบว่ามีแนวโน้มการลู่เข้าของการเปลี่ยนตำแหน่งที่เหมือนกันในขณะที่วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ใช้จำนวนโหนดที่น้อยกว่า



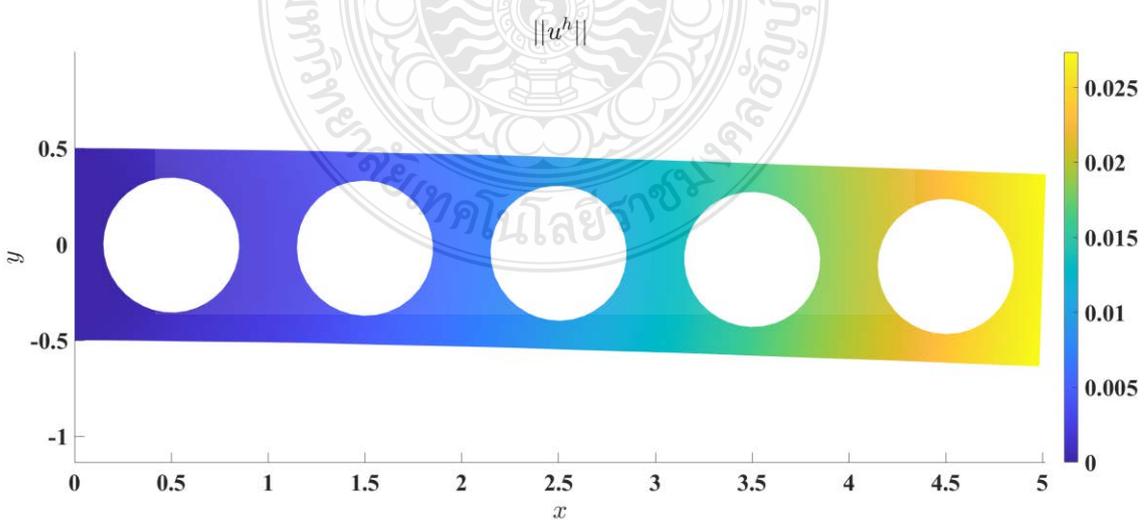
รูปที่ 4.23 แสดงค่าการโก่งตัวที่จุด A ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่องตลอดทั่วทั้งโดเมนของปัญหา เปรียบเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

รูปที่ 4.24 แสดงการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งของโหนดด้านบนตลอดความยาวของคานาที่ โครงตาข่ายละเอียดสูงสุดนั้นพบว่า ค่าที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี nCSFEM แบบแบ่งเซลล์ย่อยภายใน เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง (แสดงด้วยเส้นสีแดง) กับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์ เอลิเมนต์ (เส้นสีดำ) นั้น มีความใกล้เคียงกันมากโดยไม่มี ความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญ



รูปที่ 4.24 การโค้งตัวของโหนดด้านบนตลอดความยาวคานา (จำนวนเอลิเมนต์ 3927 จำนวนโหนด 8628)

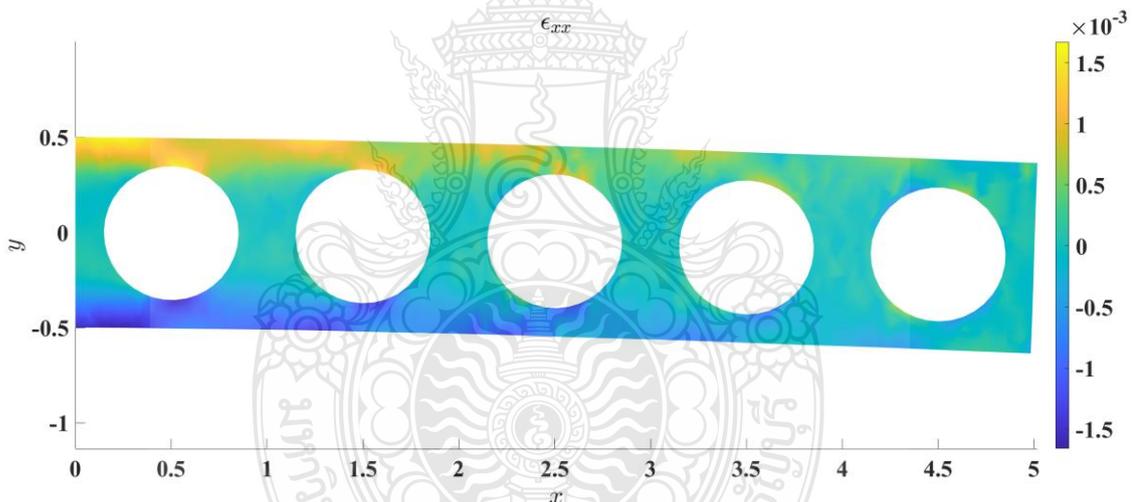
รูปที่ 4.25 แสดงค่าการกระจายตัวของ Displacement Norm ซึ่งมีค่าต่ำสุดที่บริเวณใกล้ฐานรองรับ และมีค่าสูงสุดเท่ากับ 0.025 ที่บริเวณปลายคานาซึ่งรับแรงกระทำกระจายตัวแบบพาราโบลา



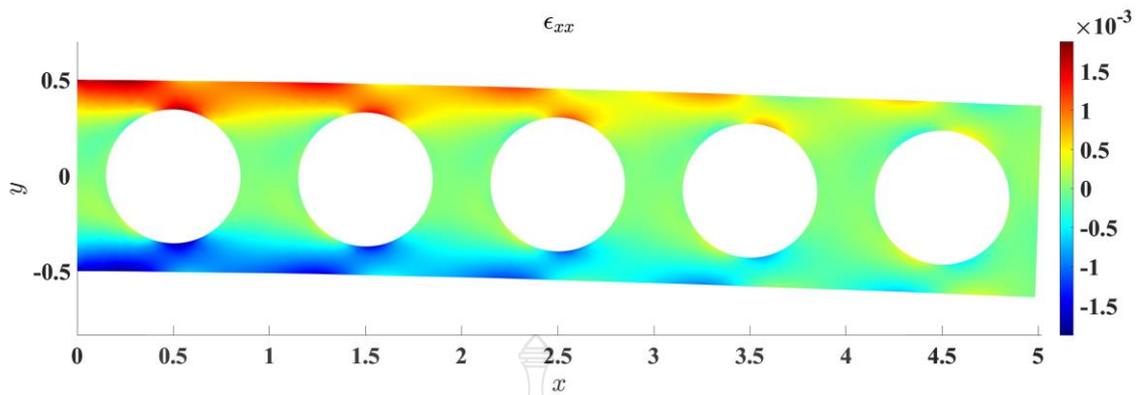
รูปที่ 4.25 แสดงค่าการกระจายตัวของ Displacement Norm

4.2 ความเครียด (Strains)

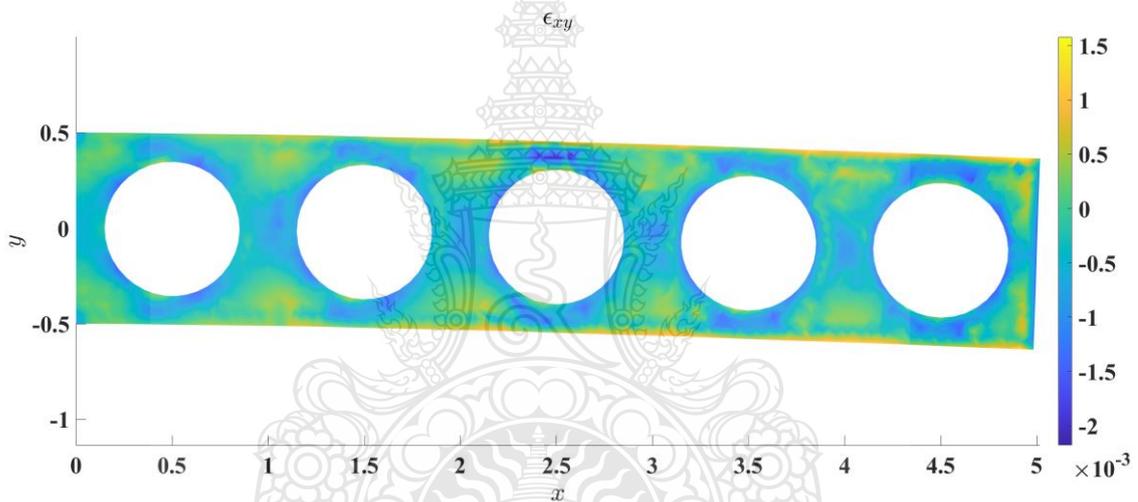
ผลจากการวิเคราะห์คานเซลล์ูลาร์ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่องโดยใช้โครงตาข่ายความละเอียดมากนั้นพบว่า ϵ_{xx} มีค่าความเครียดดึงเท่ากับ 1.50×10^{-3} บริเวณขอบบนใกล้ฐานรองรับ และมีค่าความเครียดอัดเท่ากับ -1.5×10^{-3} บริเวณขอบล่างใกล้ฐานรองรับ ϵ_{xy} มีค่าความเครียดดึงเท่ากับ 1.5×10^{-3} บริเวณพื้นที่ระหว่างช่วงรูเจาะ และมีค่าความเครียดอัดเท่ากับ -2×10^{-3} บริเวณขอบของรูเจาะ สุดท้าย ϵ_{yy} มีค่าความเครียดดึงเท่ากับ 6×10^{-4} บริเวณรอบรูเจาะด้านล่างและขอบล่างใกล้ฐานรองรับ และมีค่าความเครียดอัดเท่ากับ -4×10^{-4} บริเวณรอบรูเจาะด้านบนและขอบบนใกล้ฐานรองรับ ซึ่งผลการกระจายตัวของความเครียดปกติของคานเซลล์ูลาร์คานยี่นปลายในรูปของ Contour Plot ถูกนำมาแสดงในรูป 4.26 , รูป 4.28 และรูป 4.30 เห็นได้ว่าความเครียดจะมีค่ามากที่สุดที่บริเวณด้านล่างใกล้ฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ได้ในแนวตั้ง (Roller Support) และเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง Close-to-exact solutions ดังแสดงในรูป 4.27 , รูป 4.29 และรูป 4.31 พบว่าวิธีที่นำเสนอขึ้นแสดงลักษณะการกระจายตัวของความเครียดทั้งสามแกนไปในทิศทางเดียวกันกับผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง



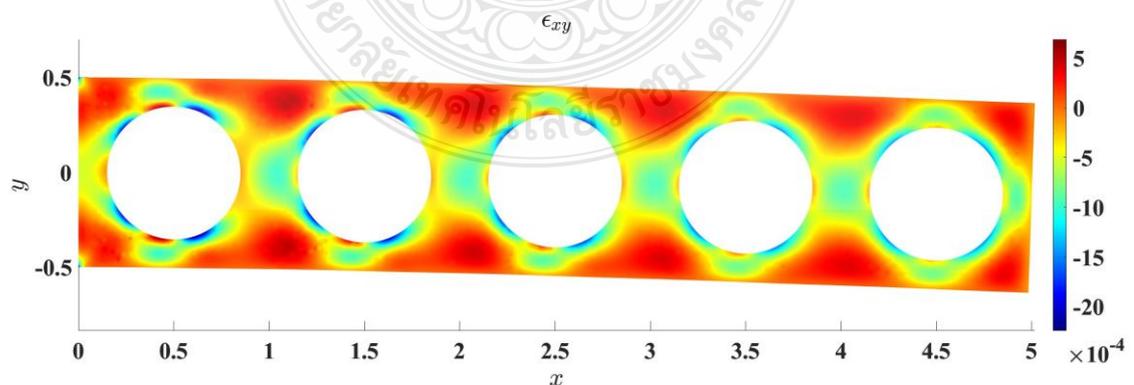
รูปที่ 4.26 การกระจายตัวค่าความเครียดของคานเซลล์ูลาร์ (ϵ_{xx}) ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง



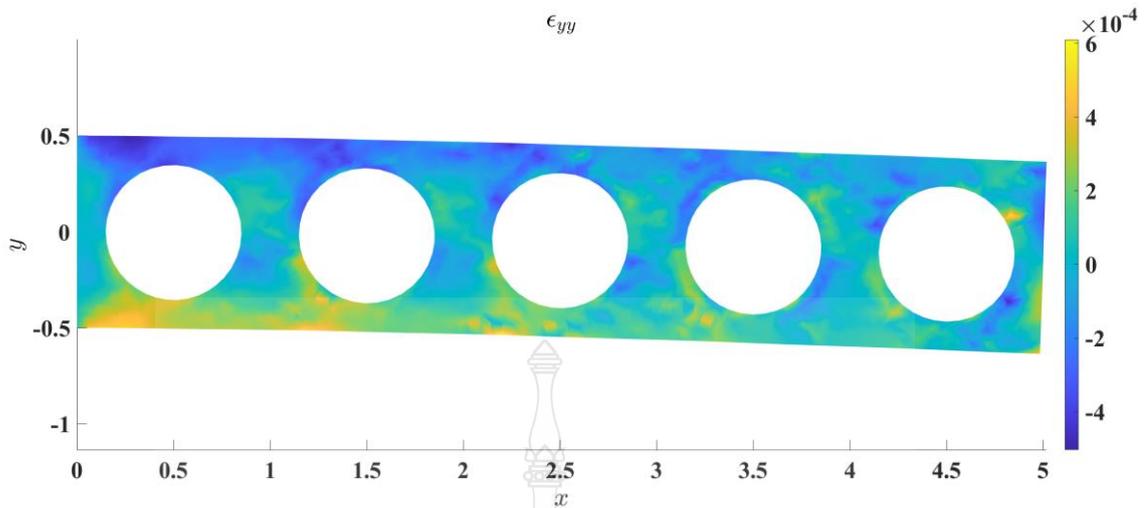
รูปที่ 4.27 การกระจายตัวค่าความเครียด (ϵ_{xx}) ของคานเซลลูลาร์ จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม Ansys Student Version



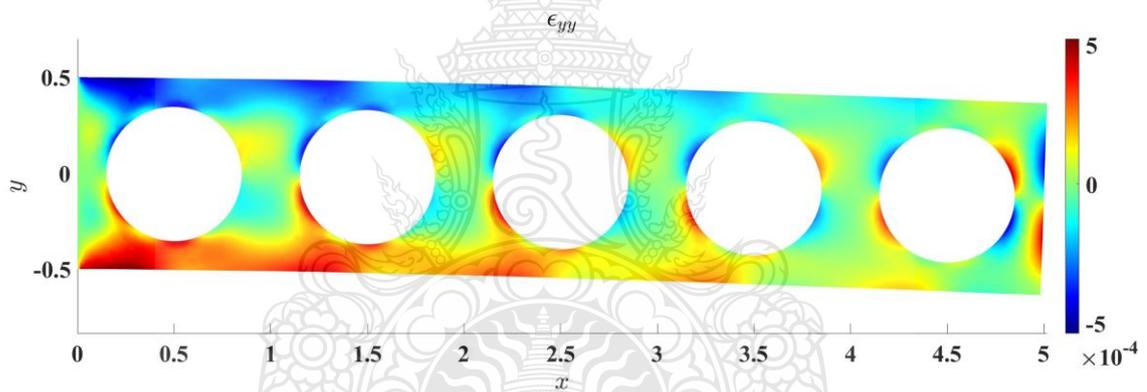
รูปที่ 4.28 การกระจายตัวค่าความเครียดของคานเซลลูลาร์ (ϵ_{xy}) ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง



รูปที่ 4.29 การกระจายตัวค่าความเครียด (ϵ_{xy}) ของคานเซลลูลาร์ จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม Ansys Student Version



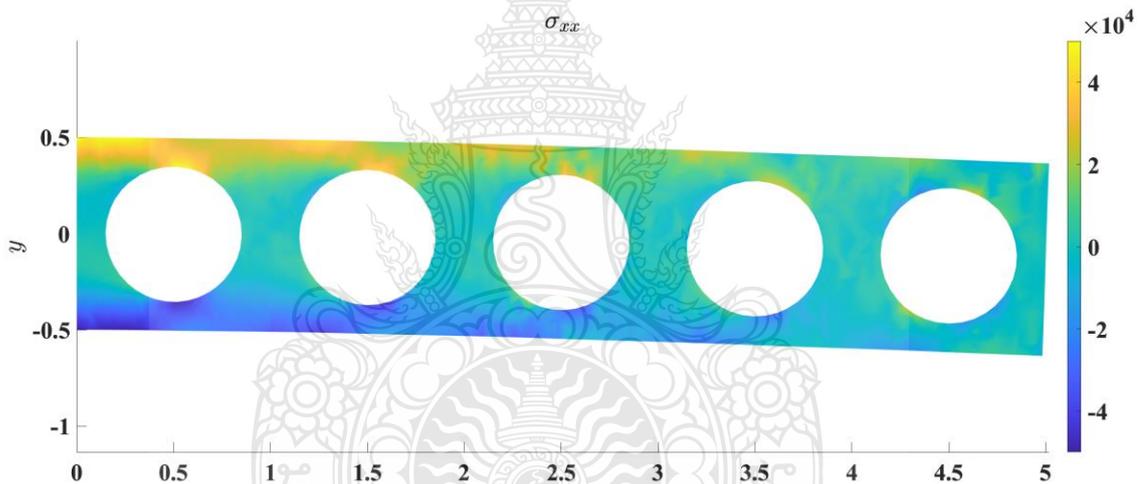
รูปที่ 4.30 การกระจายตัวค่าความเครียดของคานเซลล์ูลาร์ (ϵ_{yy}) ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง



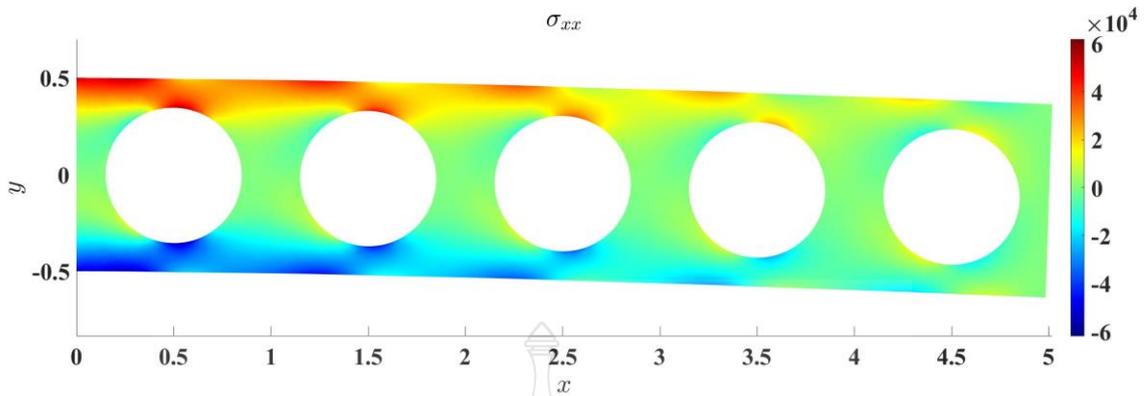
รูปที่ 4.31 การกระจายตัวค่าความเครียด (ϵ_{yy}) ของคานเซลล์ูลาร์ จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม Ansys Student Version

4.3 ความเค้น (Stresses)

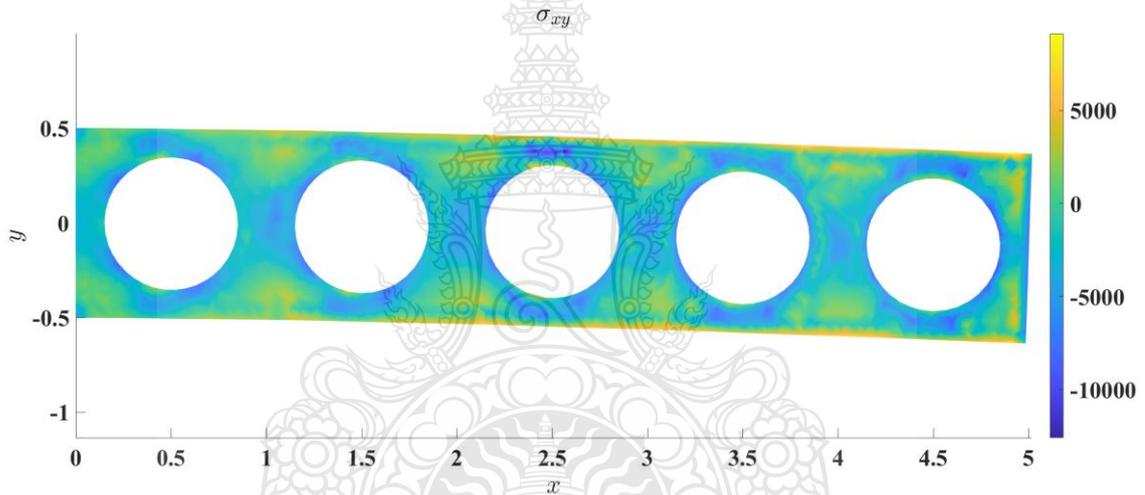
ผลจากการวิเคราะห์คานเซลล์ูลาร์ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่องโดยใช้โครงตาข่ายความละเอียดมากนั้นพบว่า σ_{xx} มีค่าความเค้นดึงเท่ากับ 4×10^4 N/m² บริเวณขอบบนใกล้ฐานรองรับ และมีค่าความเค้นอัดเท่ากับ -4×10^4 N/m² บริเวณขอบล่างใกล้ฐานรองรับ σ_{xy} มีค่าความเค้นดึงเท่ากับ 5×10^3 N/m² บริเวณพื้นที่ระหว่างช่วงรูเจาะ และมีค่าความเค้นอัดเท่ากับ -10×10^3 N/m² บริเวณขอบของรูเจาะ สุดท้าย σ_{yy} มีค่าความเค้นดึงเท่ากับ 1.5×10^4 N/m² บริเวณขอบของรูเจาะ และมีค่าความเค้นอัดเท่ากับ -1.5×10^4 N/m² บริเวณขอบของรูเจาะเช่นกัน ซึ่งผลการกระจายตัวของความเค้นของคานเซลล์ูลาร์ยื่นปลายในรูปของ Contour Plot ถูกนำมาแสดงในรูป 4.32 , รูป 4.34 และรูป 4.36 เห็นได้ว่าคุณค่าความเค้นจะมีค่ามากที่บริเวณด้านบนใกล้ฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ได้ (Roller Support) และเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง Close-to-exact solutions ดังแสดงในรูป 4.33 , รูป 4.35 และรูป 4.37 ก็พบว่าวิธีที่นำเสนอขึ้นแสดงค่าความเค้นที่สอดคล้องและมีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกัน



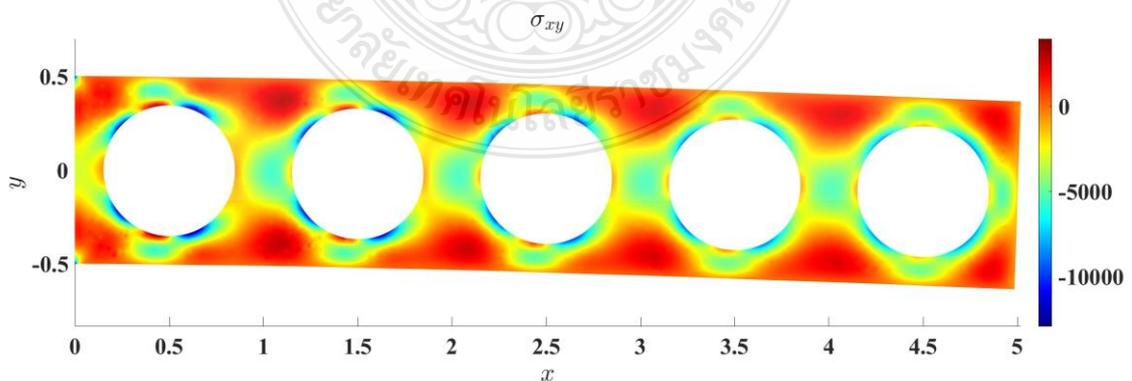
รูปที่ 4.32 การกระจายตัวค่าความเค้นของคานเซลล์ูลาร์ (σ_{xx}) ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง



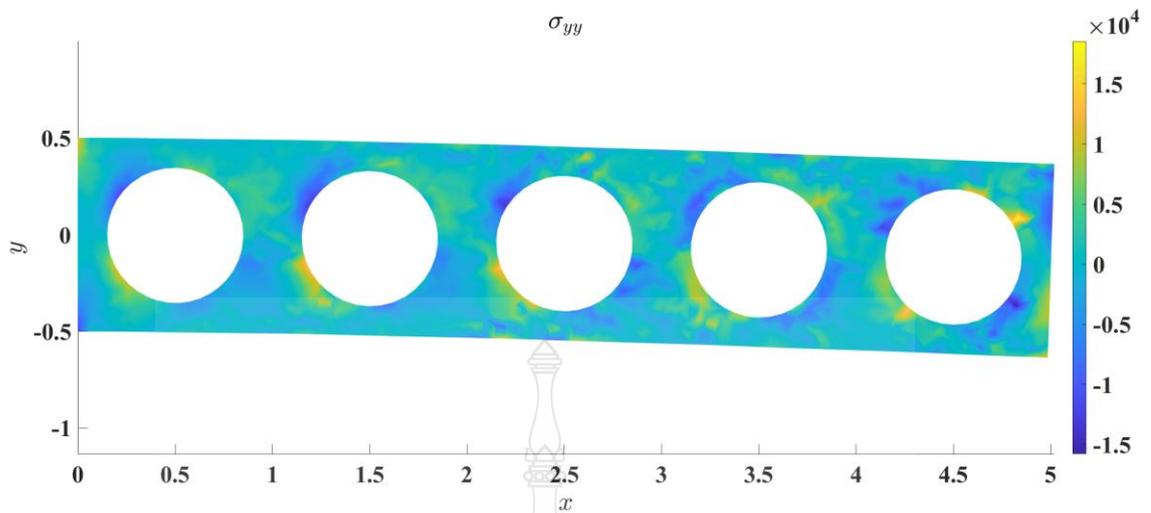
รูปที่ 4.33 การกระจายตัวค่าความเค้น (σ_{xx}) ของคานเซลล์ูลาร์ จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม Ansys Student Version



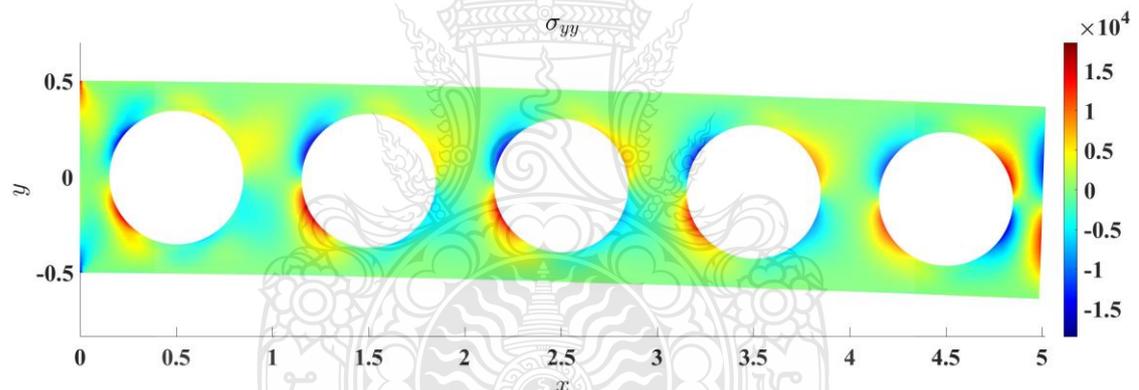
รูปที่ 4.34 การกระจายตัวค่าความเค้นของคานเซลล์ูลาร์ (σ_{xy}) ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง



รูปที่ 4.35 การกระจายตัวค่าความเค้น (σ_{xy}) ของคานเซลล์ูลาร์ จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม Ansys Student Version



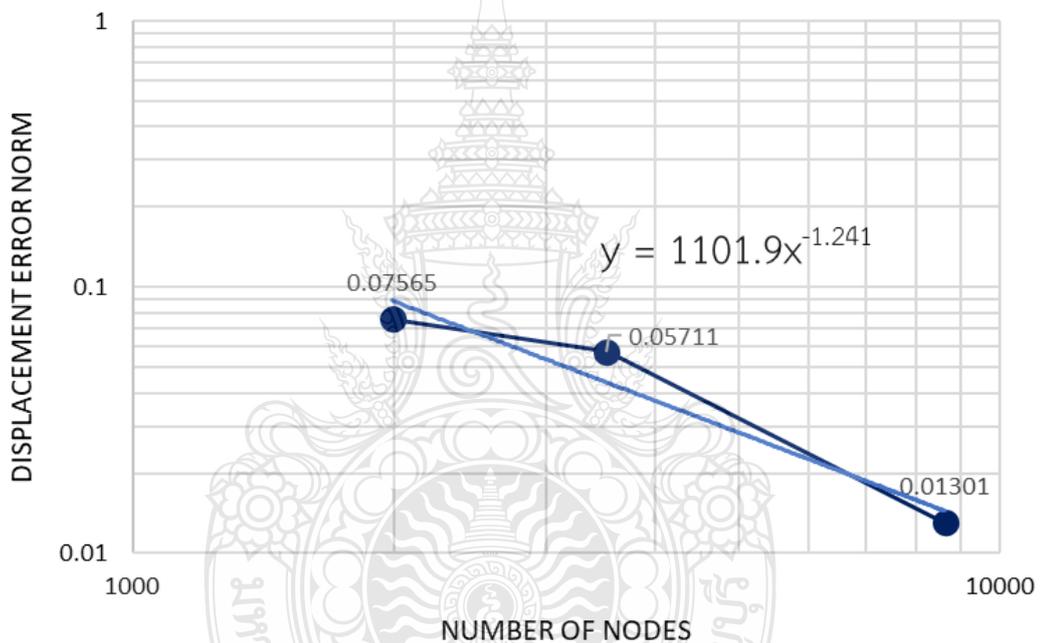
รูปที่ 4.36 การกระจายตัวค่าความเค้นของคานเซลล์ูลาร์ (σ_{yy}) ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งเซลล์ย่อยภายในของรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ต่อเนื่อง



รูปที่ 4.37 การกระจายตัวค่าความเค้น (σ_{yy}) ของคานเซลล์ูลาร์ จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม Ansys Student Version

4.4 อัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำ (Close-to-exact solution)

เมื่อนำข้อมูลจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบสร้างเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมแบบสี่มุมของคานเซลล์ูลาร์ยื่นปลายจากตารางที่ 4.1 มาวาดกราฟ โดยให้แกนแนวนอนแสดงจำนวนของโหนดและแกนในแนวตั้งแสดงค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Log-Log scale) นั้นพบว่า ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement error norms) ที่ได้ มีค่าลดลงจาก 0.07565, เป็น 0.05711 และ 0.01301 ตามลำดับ และมีค่าความชันของกราฟ เท่ากับ 1.241 สูงกว่าอัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำ (Close-to-exact solutions) เมื่อจำนวนโหนดเพิ่มขึ้นสำหรับวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขทั่วไปซึ่งมีค่าที่เหมาะสมเท่ากับ 1 (Optimal = 1) ดังแสดงในรูปที่ 4.38



รูปที่ 4.38 อัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำ

บทที่ 5

สรุปผลการทดลองและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

การวิเคราะห์สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธี Cell Based SFEM (CSFEM) โดยทำการเลือกและแบ่งเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมออกเป็นโดเมนหรือเอลิเมนต์ย่อย ๆ ในขณะที่เอลิเมนต์อื่น ๆ ที่ไม่ได้เลือกจะไม่ถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อยภายในของคานเซลลูลาร์ยื่นปลายที่รับแรงเฉือนรูปพาราโบลากระทำที่ปลายอิสระนี้ ได้แสดงให้เห็นถึงความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้เมื่อเทียบกับผลการคำนวณด้วยวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สรุปผลได้ดังต่อไปนี้

5.1.1 ค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง และค่าความคลาดเคลื่อนที่ปลายคาน (Tip Displacement and Error Norm) ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ในส่วนของการเปลี่ยนตำแหน่ง แนวโน้มของความแม่นยำที่ได้ มีลักษณะเช่นเดียวกันกับวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ กล่าวคือ มีค่าเพิ่มขึ้นตามจำนวนของโครงตาข่ายที่เพิ่มขึ้น ในกรณีนี้ ที่ความละเอียดของโครงตาข่ายสูงสุด ความแม่นยำผลลัพธ์ของวิธีที่นำเสนอ มีค่าดีกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในขณะที่ใช้จำนวนโหนดน้อยกว่าและเวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เนื่องจากไม่ต้องทำการคำนวณ Jacobian matrix (J)

5.1.2 ความเครียด (Strains) เมื่อใช้โครงตาข่ายความละเอียดมากนั้น พบว่าในระนาบ X-X ϵ_{xx} มีค่าความเครียดตั้งเท่ากับ 1.50×10^{-3} บริเวณขอบบนใกล้ฐานรองรับ และมีค่าความเครียดอัดเท่ากับ -1.5×10^{-3} บริเวณขอบล่างใกล้ฐานรองรับ และเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง Close-to-exact solutions พบว่าวิธีที่นำเสนอนั้นแสดงลักษณะการกระจายตัวของความเครียดทั้งสามแกนไปในทิศทางเดียวกันกับผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง

5.1.3 ความเค้น (Stresses) จากการวิเคราะห์พบว่า มีแนวโน้มสู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำตรงเมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเล็กลง เมื่อใช้โครงตาข่ายที่ความละเอียดสูงที่สุดนั้นพบว่า σ_{xx} มีค่าความเค้นตั้งเท่ากับ 4×10^4 N/m² บริเวณขอบบนใกล้ฐานรองรับ และมีค่าความเค้นอัดเท่ากับ -4×10^4 N/m² บริเวณขอบล่างใกล้ฐานรองรับ เห็นได้ว่าความเค้นจะมีค่ามากที่บริเวณด้านบนใกล้ฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ได้ (Roller Support) และเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง Close-to-exact solutions ก็พบว่าวิธีที่นำเสนอนั้นแสดงค่าความเค้นที่สอดคล้องและมีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกัน

5.1.4 อัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง (Close-to-exact solutions) ผลการวิเคราะห์ พบว่า ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement error norms) ที่ได้ มีค่าลดลงจาก 0.07565, เป็น 0.05711 และ 0.01301 ตามลำดับ ค่าความชันของกราฟที่ได้มีค่าเท่ากับ 1.241 สูงกว่าค่าสำหรับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่มีค่าเท่ากับ 1.0

ข้อสังเกตที่สำคัญสำหรับการศึกษาวิจัยในครั้งนี้ พบว่า จำนวนเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมที่ถูกแบ่งเซลล์ย่อยนั้น ควรจะต้องมีจำนวนมากพอโดยมีด้านอย่างน้อยหนึ่งด้าน ติดกับเอลิเมนต์หลักอื่น ๆ ซึ่งถูกแบ่งเซลล์ย่อยแล้วเช่นเดียวกัน เพื่อให้มั่นใจถึงประสิทธิภาพของทั้งความแม่นยำและอัตราการลู่เข้า

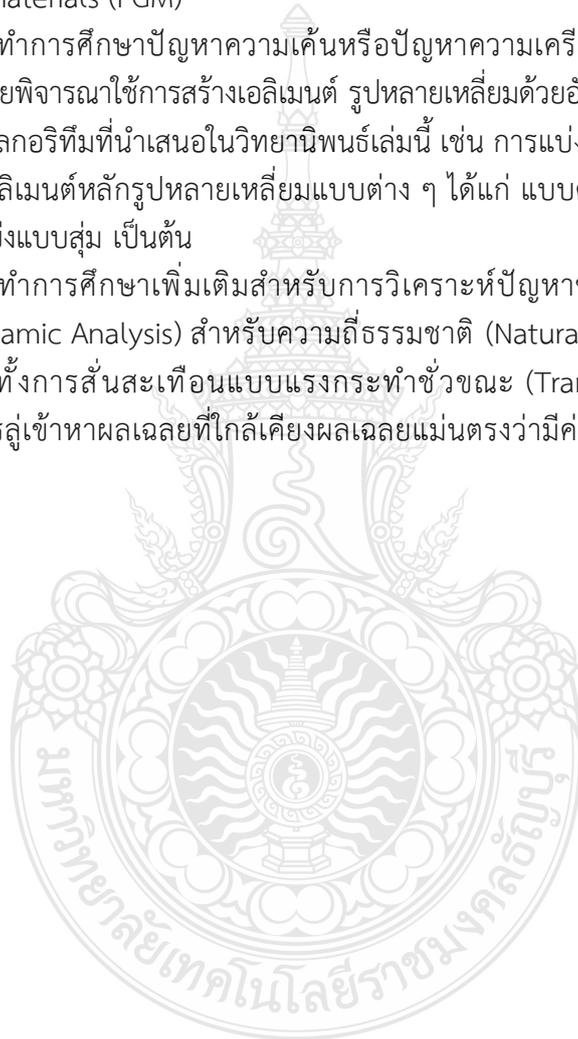
หาผลเฉลยแม่นยำของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการแบ่งเซลล์ย่อยแบบสุ่ม (Random) ภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมในครั้งนี้

5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

5.2.1 ควรทำการศึกษาประเด็นเพิ่มเติมสำหรับ คานเซลล์ลูลาร์โดยเปลี่ยนเป็นวัสดุ Functional grade materials (FGM)

5.2.2 ควรทำการศึกษาปัญหาความเค้นหรือปัญหาความเครียดในระนาบ Plane Stress หรือ Plane Strain โดยพิจารณาใช้การสร้างเอลิเมนต์ รูปหลายเหลี่ยมด้วยอัลกอริทึม (algorithm) อื่น ๆ เพื่อเปรียบเทียบกับอัลกอริทึมที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ เช่น การแบ่งเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอตามด้านหรือโหนดของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมแบบต่าง ๆ ได้แก่ แบบด้านหรือโหนดของเอลิเมนต์หลักที่ไม่ติดกันหรือแบ่งแบบสุ่ม เป็นต้น

5.2.3 ควรทำการศึกษาเพิ่มเติมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของแข็ง (Solid Mechanic) แบบพลศาสตร์ (Dynamic Analysis) สำหรับความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) โหมดรูปร่าง (Mode Shape) รวมทั้งการสั่นสะเทือนแบบแรงกระทำชั่วขณะ (Transient Vibration Analysis) เพื่อทดสอบอัตราการลู่เข้าหาผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำว่ามีค่าที่เหมาะสมหรือไม่



บรรณานุกรม

- [1] Seangatith, D.S., *ADVANCED MECHANICS OF MATERIALS*. 2001.
- [2] ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล. 2545.
- [3] Rao, S.S., *The finite element method in engineering*. 2017: Butterworth-heinemann.
- [4] Pavlou, D.G., *Essentials of the Finite Element Method For Mechanical and Structural Engineers*. 2015.
- [5] Wang, H. and Q.-H. Qin, *Methods of fundamental solutions in solid mechanics*. 2019: Elsevier.
- [6] Liu, G.-R., and Nguyen Trung., *Smoothed finite element methods*. CRC press. 2016.
- [7] Wachspress, E.L. *A rational basis for function approximation*. in *Conference on Applications of Numerical Analysis: Held in Dundee/Scotland, March 23–26, 1971*. 2006. Springer.
- [8] Wachspress, E.L., *A rational finite element basis*. 1975.
- [9] Dai, K.-Y., G.-R. Liu, and T.-T. Nguyen, *An n-sided polygonal smoothed finite element method (nSFEM) for solid mechanics*. *Finite elements in analysis and design*, 2007. **43**(11-12): p. 847-860.
- [10] Nguyen-Thoi, T., G. Liu, and H. Nguyen-Xuan, *An n-sided polygonal edge-based smoothed finite element method (nES-FEM) for solid mechanics*. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 2011. **27**(9): p. 1446-1472.
- [11] Nguyen-Thoi, T., et al., *A smoothed coupled NS/nES-FEM for dynamic analysis of 2D fluid–solid interaction problems*. *Applied Mathematics and Computation*, 2014. **232**: p. 324-346.
- [12] Liu, G., et al., *A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems*. *Computers & structures*, 2009. **87**(1-2): p. 14-26.
- [13] Sellam, M., S. Natarajan, and K. Kannan, *Smoothed polygonal finite element method for generalized elastic solids subjected to torsion*. *Computers & Structures*, 2017. **188**: p. 32-44.

บรรณานุกรม (ต่อ)

- [14] Biabanaki, S. and A. Khoei, *A polygonal finite element method for modeling arbitrary interfaces in large deformation problems*. Computational Mechanics, 2012. **50**: p. 19-33.
- [15] Biabanaki, S., A. Khoei, and P. Wriggers, *Polygonal finite element methods for contact-impact problems on non-conformal meshes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014. **269**: p. 198-221.
- [16] Khoei, A., R. Yasbolaghi, and S. Biabanaki, *A polygonal finite element method for modeling crack propagation with minimum remeshing*. International Journal of Fracture, 2015. **194**: p. 123-148.
- [17] Katili, I., et al., *A unified polygonal locking-free thin/thick smoothed plate element*. Composite Structures, 2019. **219**: p. 147-157.
- [18] Katili, I., *A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields—part I: An extended DKT element for thick-plate bending analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1993. **36**(11): p. 1859-1883.
- [19] Surendran, M., A. Pramod, and S. Natarajan, *Evaluation of fracture parameters by coupling the edge-based smoothed finite element method and the scaled boundary finite element method*. Journal of Applied and Computational Mechanics, 2019. **5**(Special Issue: Computational Methods for Material Failure): p. 540-551.
- [20] Kim, J. and S. Im, *Polygonal type variable-node elements by means of the smoothed finite element method for analysis of two-dimensional fluid-solid interaction problems in viscous incompressible flows*. Computers & Structures, 2017. **182**: p. 475-490.
- [21] Wu, S.-W., et al., *Arbitrary polygon mesh for elastic and elastoplastic analysis of solids using smoothed finite element method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023. **405**: p. 115874.
- [22] Talischi, C., et al., *Polygonal finite elements for topology optimization: A unifying paradigm*. International journal for numerical methods in engineering, 2010. **82**(6): p. 671-698.

บรรณานุกรม (ต่อ)

- [23] Ooi, E.T., Chongmin Song, Francis Tin-Loi, and Zhenjun Yang. , "Polygon scaled boundary finite elements for crack propagation modelling." *International journal for numerical methods in engineering* 91, no. 3 2012: p. 319-342.
- [24] Timoshenko, S. and J. Goodier, *Theory of Elasticity* McGraw-Hill, New York. 1951.



ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล นางสาว ธนพร แก้วใจรัักษ์
วัน เดือน ปีเกิด 06 พฤศจิกายน 2538
ที่อยู่ 119/20 ม. 1 ต.บางศรีเมือง อ.เมือง จ.นนทบุรี 11000
การศึกษา ปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิศวกรรมโยธา
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
ประสบการณ์การทำงาน วิศวกรโยธา กรมชลประทาน
วิศวกรโยธาปฏิบัติการ กรมทรัพยากรน้ำ
วิศวกรโยธาปฏิบัติการ กรมชลประทาน
เบอร์โทรศัพท์ 088-2189535
อีเมล thanaporn_k@mail.rmutt.ac.th

